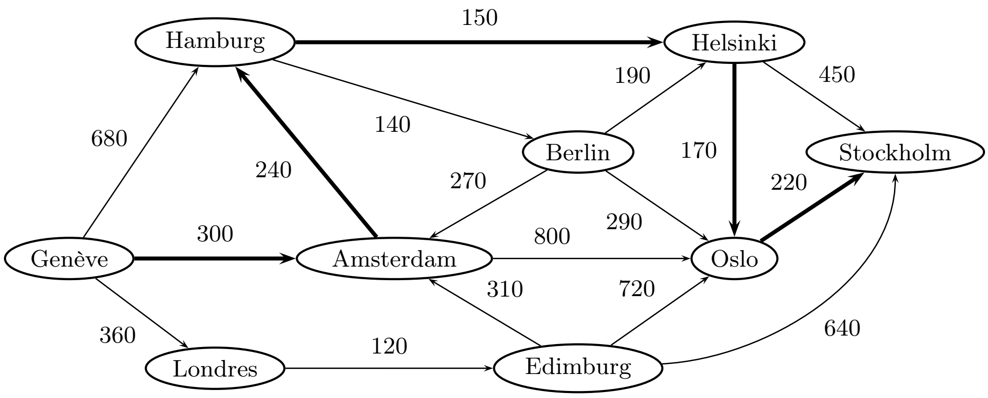
Corrigé 10

Problème 1

a) Il s'agit de trouver le plus court chemin au sens du prix à payer de Genève à Stockholm. Comme le fait de passer par une ville suppose que l'on doit y rester une nuit, il faut ajouter le prix de l'hôtel correspondant à chaque arc sortant d'une ville escale. Le nouveau graphe devient :



Le plus court chemin entre Genève et Stockholm utilise les arcs marqués en gras. Le trajet coûte 1080 Frs.

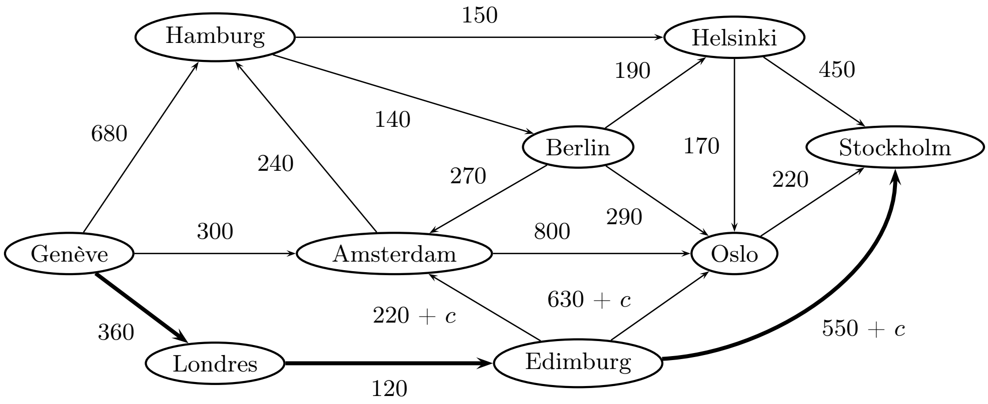
Détail des étapes de l'algorithme de Dijkstra, où G, A, B, E, Ha, He, L, O et S sont les initiales des villes :

Itér.	v^*	G	A	B	E	Ha	He	L	O	S
0	G	**0 -**	300 G	∞ -	∞ -	680 G	∞ -	360 G	∞ -	∞ -
1	A		**300 G**	∞ -	∞ -	540 A	∞ -	360 G	1100 A	∞ -
2	L			∞ -	480 L	540 A	∞ -	**360 G**	1100 A	∞ -
3	E			∞ -	**480 L**	540 A	∞ -		1100 A	1120 E
4	Ha			680 Ha		**540 A**	690 Ha		1100 A	1120 E
5	B			**680 Ha**			690 Ha		970 B	1120 E
6	He						**690 Ha**		860 He	1120 E
7	O								**860 He**	1080 O
8	S									**1080 O**

Le chemin optimal est donc :

$$\textit{Genève} \longrightarrow \textit{Amsterdam} \longrightarrow \textit{Hamburg} \longrightarrow \textit{Helsinki} \longrightarrow \textit{Oslo} \longrightarrow \textit{Stockholm}$$

b) Soit $c \geq 0$ le prix de la chambre à Edimburg. Le nouveau graphe de travail est :



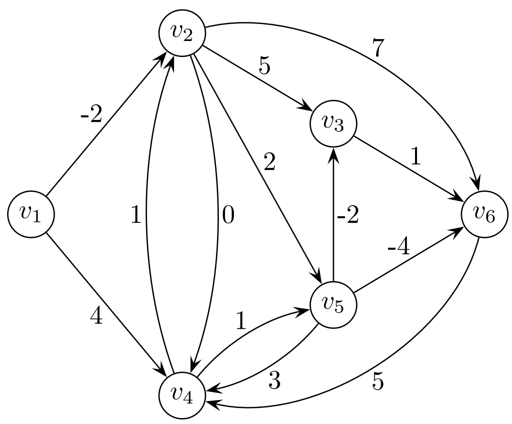
Appliquant l'algorithme de Dijkstra, on trouve :

Itér.	v^*	G	A	B	E	Ha	He	L	O	S
0	G	**0 -**	300 G	∞ -	∞ -	680 G	∞ -	360 G	∞ -	∞ -
1	A		**300 G**	∞ -	∞ -	540 A	∞ -	360 G	1100 A	∞ -
2	L			∞ -	480 L	540 A	∞ -	**360 G**	1100 A	∞ -
3	E			∞ -	**480 L**	540 A	∞ -		1100 A	$1030 + c$ E
4	Ha			680 Ha		**540 A**	690 Ha		1100 A	$1030 + c$ E
5	B			**680 Ha**			690 Ha		970 B	$1030 + c$ E
6	He						**690 Ha**		860 He	$1030 + c$ E
7	O								**860 He**	$1030 + c$ E si $0 \leq c \leq 50$
7	O								**860 He**	1080 O sinon
8	S									**1030 + *c* E** si $0 \leq c \leq 50$
8	S									**1080 O** sinon

Le chemin le moins cher passe par Edimburg (en gras sur le dessin) si $0 \leq c \leq 50$ Frs.

Problème 2

En multipliant par -1 le poids de chacune des arêtes, on ramène le problème à la recherche du plus court chemin du sommet v_1 au sommet v_6 dans le réseau $R' = (V, E, c')$ ci-dessous :



Comme ce réseau contient des arêtes de poids négatifs, on applique l'algorithme générique des plus courts chemins en retirant de L le sommet de plus petit index :

Itér.	Candidats V	Étiquettes d_i/ Prédécesseurs $p(i)$						Traiter
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
1	$\{v_1\}$	0/-	∞/-	∞/-	∞/-	∞/-	∞/-	v_1
2	$\{v_2, v_4\}$	0/-	-2/v_1	∞/-	4/v_1	∞/-	∞/-	v_2
3	$\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$	0/-	-2/v_1	3/v_2	-2/v_2	0/v_2	5/v_2	v_3
4	$\{v_4, v_5, v_6\}$	0/-	-2/v_1	3/v_2	-2/v_2	0/v_2	4/v_3	v_4
5	$\{v_5, v_6\}$	0/-	-2/v_1	3/v_2	-2/v_2	-1/v_4	4/v_3	v_5
6	$\{v_3, v_6\}$	0/-	-2/v_1	-3/v_5	-2/v_2	-1/v_4	-5/v_5	v_3
7	$\{v_6\}$	0/-	-2/v_1	-3/v_5	-2/v_2	-1/v_4	-5/v_5	v_6
8	$\varnothing$	0/-	-2/v_1	-3/v_5	-2/v_2	-1/v_4	-5/v_5	

Le plus court chemin du sommet v_1 au sommet v_6 dans R' est unique, de valeur -5 et est le chemin :

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_6.$$

C'est également le plus long chemin des sommets v_1 à v_6 dans R mais sa longueur est égale à 5.

Problème 3

a) Le déroulement de l'algorithme est résumé dans le tableau suivant :

Itération	V	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	Traiter
1	{1}	0	∞	∞	∞	∞	∞	1
2	{2,4}	0	1	∞	3.5	∞	∞	2
3	{3,4,5}	0	1	5	3.5	4	∞	4
4	{3,5}	0	1	5	3.5	4	∞	5
5	{3,6}	0	1	2	3.5	4	6	3
6	{4,6}	0	1	2	3	4	5	4
7	{6}	0	1	2	3	4	5	6
8	$\varnothing$	0	1	2	3	4	5	

b) En effet, le sommet 4 est traité deux fois. Ceci provient du fait qu'une hypothèse sur le réseau n'est pas vérifiée : le poids de l'arc $(5, 3)$ est négatif. On remarque néanmoins que l'algorithme fonctionne correctement et fournit les plus courts chemins depuis 1.

c) Il suffit de poser une demande de 1 à tous les sommets d'arrivée et une offre satisfaisant toutes ces demandes au sommet 1. Dans la solution, chacune des unités de marchandise terminant à un sommet donné parcourra le chemin le plus court depuis 1 jusqu'à ce sommet.

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij} \\ \text{s.c :} & y_1 = n-1 \\ & y_i = -1 \quad \forall i \in \mathcal{N} \setminus \{1\} \\ & y_i = \displaystyle\sum_{j|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} \quad \forall i \in \mathcal{N} \end{array}$$