Corrigé 9

Problème 1

Le pas itératif est donné par :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k D_k \nabla f(x_k)$$

où $D_k = H_k^{-1}$,

$$H_k = H_{k-1} + \frac{Y_k Y_k^T}{y_k^T d_k} - \frac{H_{k-1} d_k d_k^T H_{k-1}}{d_k^T H_{k-1} d_k}$$

avec

$$\begin{aligned} d_k &= x_k - x_{k-1} \\ Y_k &= \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}) \end{aligned}$$

a) On obtient les itérés suivants ($\alpha_k = 1$):

$$x_1 = (0 \quad -12)^T$$

$$x_2 = (0.0146 \quad 0.0002)^T$$

b) $\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}}{16} - \frac{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}{8} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

$$H_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Problème 2

Le gradient et le hessien de f sont donnés par :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 4x_2^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix} \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

a) La direction de la plus forte pente pour f en $\boldsymbol{x_0} = (1\ -2)^T$ est donnée par $\boldsymbol{d_0} = -\nabla f(1\ -2)^T = (-6\ 32)^T$. $\alpha_0 = \lambda^i$ où i est le premier entier positif qui vérifie la condition d'Armijo. On trouve que cette condition est vérifiée pour $i = 3$, ce qui nous donne $\alpha_0 = (0.5)^3 = 1/8$. On obtient dès lors le nouvel itéré $\boldsymbol{x_1} = (1/4\ 2)^T$ pour une valeur de la fonction objectif de $16 + 3/16$ à comparer avec $f(\boldsymbol{x_0}) = 19$.

b) Pour $\lambda = 0.1$, on trouve cette fois que $i = 1$ et $\alpha_0 = 0.1$ et que, par conséquent, $\boldsymbol{x_1} = (2/5 \; 6/5)^T$ pour une valeur de la fonction objectif de 2.5536.

Le facteur de réduction définissant la suite de pas testés étant plus petit, on trouve plus rapidement un pas satisfaisant la condition de décroissance suffisante. De plus, comme le pas résultant est plus petit, on obtient une meilleure réduction de la valeur de la fonction objectif. Cela s'explique par le fait que si on calcule α_{0*} en effectuant une recherche linéaire exacte le long de $\boldsymbol{d_0}$, on trouve que $\alpha_{0*} < 0.1 < 1/8$!

Problème 3

a) La direction de Gauss-Newton au point $\boldsymbol{x}$ est donnée par d telle que :

$$\nabla g(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})^T d = -\nabla g(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = -\nabla f(\boldsymbol{x})$$

Rappel : une direction d est une direction de descente en $\boldsymbol{x}$ si : $d^T\nabla f(\boldsymbol{x}) < 0$.
Puisque $\nabla g(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})^T$ est définie positive, alors $d^T\nabla f(\boldsymbol{x}) = -d^T\nabla g(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})^T d < 0$.

b) Une itération de Gauss-Newton utilisant la méthode de Levenberg-Marquardt est donnée par :

$$\boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{x_k} - \left(\nabla g(\boldsymbol{x_k})\nabla g(\boldsymbol{x_k})^T + 10I_2\right)^{-1}\nabla g(\boldsymbol{x_k})g(\boldsymbol{x_k})$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x_{k+1}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}(-2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La valeur de la fonction objectif est $f(\boldsymbol{x_{k+1}}) \simeq 0.73$

May 12, 2010 – mbi/mfe-jch