EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2009/2010

SÉRIE D'EXERCICES 8

- Problèmes à résoudre :
  1) 2) 3)
- Problèmes supplémentaires :
  4)

Problème 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Montrer que, indépendamment du point de départ, la méthode de Newton locale (obtenue en choisissant $\alpha_k = 1\ \forall k$) appliquée à cette fonction converge en une seule itération.

Problème 2

Soient les deux fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{9}{2}x_2^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \end{array}$$

a) Calculer le gradient et la matrice hessienne de f pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Appliquer 3 itérations de l'algorithme de la plus forte pente en partant de $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ en utilisant le pas

$$\alpha_k = \frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^T \nabla f(\boldsymbol{x}_k)}{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k) \nabla f(\boldsymbol{x}_k)}.$$

b) Mêmes questions qu'en a) avec la fonction g.

c) Appliquer l'algorithme de Newton local à la fonction f avec $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problème 3

Rappel :
Lors de l'application d'une méthode de descente pour l'optimisation d'une fonction non linéaire, on se déplace d'une certaine longueur de pas α dans une direction de descente $\boldsymbol{d}$. Pour que α ne soit ni trop grand, ni trop petit, il doit vérifier les **conditions d'Armijo** *suivantes :*

$$\begin{array}{lll} (1) & f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{d}) \leq f(\boldsymbol{x}) + \sigma\alpha\nabla f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} & \sigma \in (0,1) \\ (2) & \nabla f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{d})\boldsymbol{d} \geq \tau\nabla f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} & \tau \in (\sigma, 1) \end{array}$$

En pratique, la condition (2) n'est généralement pas nécessaire, car l'utilisation d'une stratégie basée sur des réductions successives du pas empêche d'obtenir des pas trop petits.

Soit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Soient encore les données suivantes :

$$\boldsymbol{x}_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 0.1 \quad \text{et} \quad \tau = 0.5.$$

a) Calculer le gradient de f pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $\boldsymbol{d}_c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une direction de descente en $\boldsymbol{x}_c$.

c) Déterminer si $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.1$ et $\alpha_3 = 0.5$ vérifient les conditions d'Armijo.

Problème 4

Dans les algorithmes de minimisation présentés ci-dessous, discuter la validité des hypothèses des méthodes de descente vues au cours. Justifier précisément à chaque fois les raisons pour lesquelles l'algorithme rentre ou ne rentre pas dans la catégorie des méthodes de descente vues au cours. La fonction à minimiser $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est toujours deux fois continûment différentiable.

(1) $x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k)$

(2) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$.

(3) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 2\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ 3\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \vdots \\ n\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et α_k vérifie

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq \frac{1}{3}\alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k.$$

(4) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, avec

$$d_k = -(\nabla^2 f(x_k) + \mu I)\nabla f(x_k),$$

μ plus grand que $|\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x_k))|$ et $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$.

(5) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et α_k vérifie

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k.$$

(6) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

et $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$.

April 19, 2010 – mbi/mfe