EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
**Prof. M. Bierlaire**

**RECHERCHE OPÉRATIONNELLE**
**GC/SIE**
Printemps 2009/2010

---

# SÉRIE D'EXERCICES 7

---

Vous trouverez les énoncés des séries d'exercices, les notes de cours et d'autres informations sur le cours sur le site web :

`http://transp-or2.epfl.ch/cours/RechOp/08-09/`

- Problème-type :
  1) 2)
- Problèmes à résoudre :
  3) 4)
- Problèmes supplémentaires :
  5)

## Problème 1

Etudier la fonction suivante, en donnant, s'ils existent, tous ses extrema locaux et globaux.

$$f(x) = 6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x^2 - 27$$

## Problème 2

Pour les deux fonctions ci-dessous, déterminer tous les points stationnaires et, pour chacun d'eux, déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum. Justifier en utilisant les conditions d'optimalité.

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 4)^2 + x_2^2$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2 - x_1^2$

## Problème 3

Soient les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^3 - x_1 - x_2$$

a) Calculer le gradient des fonctions $f$ et $g$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

c) Calculer la matrice hessienne des fonctions $f$ et $g$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Etudier les valeurs pour lesquelles cette matrice est définie positive. Que peut-on en déduire ?

d) Combien de points critiques ces fonctions ont-elles ? Pour chacun de ces points, discuter s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local.

**Problème 4**

Considérer la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$$

- Est-ce que $x_0 = (0,0)^T$ est un minimum local de la fonction $f$ ? Justifier.
- Si oui, est-ce aussi un minimum global? Si non, trouver une direction de descente pour $f$ en $x_0$.

**Problème 5**

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes ? Lesquelles sont concaves ? Justifier votre réponse.

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = 1 - x^2$

b) $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : g(x) = x^2 - 1$

c) $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**RAPPEL :**

- Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout couple de points $(x, y)$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$.
- Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est concave si et seulement si pour tout couple de points $(x, y)$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$.
- Une fonction affine, encore appelée linéaire, est à la fois convexe et concave.

---

April 16, 2010 – mbi/mfe