Corrigé 7

Problème 1

f est derivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 30(x+1)x(x-1)(x-2)$. Le tableau de variation de f s'écrit donc:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		∞
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	-27	$\nearrow$	-16	$\searrow$	-35	$\nearrow$	$+\infty$

Nous déduisons de ce tableau que f admet -1 et 1 comme maxima locaux et 0 et 2 comme minima locaux, et qu'elle n'admet pas d'extrema globaux (car elle n'est ni majorée, ni minorée).

Problème 2

(a) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1(x_1^2 - 4) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \{(-2,0), (0,0), (2,0)\}$. Pour chacun de ces points, déterminons s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point qui n'est ni l'un ni l'autre. Pour cela, nous calculons la matrice Hessienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(3x_1^2 - 4) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- en $(-2, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice étant définie positive, $(-2, 0)$ est un minimum local de f.

- en $(0, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice ayant une valeur propre négative et une valeur propre positive, le point $(0, 0)$ correspond à un point de selle de f.

- en $(2, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant définie positive, $(2,0)$ est un minimum local de f.

Comme $f(-2,0) = f(2,0) = 0$ et que f est à valeurs positives, on en déduit que f atteint deux minima globaux en $(-2,0)$ et en $(2,0)$.

(b) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1(1 + 2(x_2 - x_1^2)) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_2 - x_1^2) \end{cases}$$

Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$. Déterminons si $(0,0)$ est un minimum local, un maximum local ou un point qui n'est ni l'un ni l'autre.
Pour cela, nous calculons la matrice Hessienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4x_2 - 2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

En $(0,0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ayant une valeur propre négative et une valeur propre positive, le point $(0,0)$ correspond à un point de selle.

Problème 3

- Fonction f:
  Le gradient et la matrice hessienne de f sont :

$$\begin{aligned} \nabla g(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 g(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}.$$

  La matrice hessienne est clairement définie positive pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, ce qui traduit la convexité de la fonction f. En d'autres termes, tout extremum de f est un minimum local strict. Les points critiques sont les points $\boldsymbol{x}^*$ pour lesquels le gradient de f s'annule. Dans notre cas, $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^* = (0,0)$. Ce point est un minimum local strict de f puisque $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ est définie positive. Etant l'unique point stationnaire, ce point est le minimum global de la fonction f.

- Fonction g:
  Le gradient et la matrice hessienne de g sont :

$$\begin{aligned} \nabla g(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ 3x_2^2 - 1 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 g(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}.$$

Le gradient s'annule en 4 points (critiques) : $\boldsymbol{x} = (1, \sqrt{1/3})$, $\boldsymbol{x} = (1, -\sqrt{1/3})$, $\boldsymbol{x} = (-1, \sqrt{1/3})$ et $\boldsymbol{x} = (-1, -\sqrt{1/3})$. La matrice hessienne au point $\boldsymbol{x}^*$ est définie positive si et seulement si $\boldsymbol{x}^* > \mathbf{0}$, et donc seul le premier de ces points est un minimum local strict. (Le dernier point est un maximum local strict et les autres sont des points selle).

Problème 4

- Le gradient de la fonction est donné par :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 2 + e^{x_1+x_2} \\ -x_1 + 4x_2 + e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}$$

  Au point $x_0 = (0\ 0)$, on trouve donc :

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Le point x_0 ne vérifie pas la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, à savoir $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$. Ce point n'est donc pas un minimum local de f.

- Pour qu'une direction $d = (d_1, d_2)^T$ soit une direction de descente pour f en x_0, il faut que la condition suivante soit vérifiée :

$$\nabla f(x_0)^T d < 0$$

  Cela peut s'écrire :

$$-d_1 + d_2 < 0 \text{ ou encore } d_2 < d_1$$

  Par exemple, $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une direction de descente. Cela correspond à la direction de la plus forte pente $d = -\nabla f(x_0)$.

Problème 5

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = 1 - x^2$ est concave:
$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = 1 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda) x_2^2$
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 1 - \lambda^2 x_1^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2$

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2) = \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$

Ce dont on déduit que f est concave.

b) $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : g(x) = x^2 - 1$ est convexe:

$\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2 - 1$

$g(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_1 x_2 - 1$

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:

$g(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) - \lambda g(x_1) - (1-\lambda) g(x_2) = -\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \leq 0$

Ce dont on déduit que g est convexe.

c) La fonction $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est convexe. Il suffit de remarquer que $h(x,y) = \|(x,y)\|_2$ où $\| \,.\, \|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après l'inégalité triangulaire et d'après l'homogéneité de la norme pour les scalaires positifs:

$h(\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)) \leq \lambda h(x_1, y_1) + (1-\lambda) h(x_2, y_2)$

April 22, 2010 – mbi/mfe