Corrigé 6

Problème 1

a)
$$\begin{array}{llcl} \text{Min}\, w = & y_1 & & \\ \text{s.c.} & 8y_1 & = & 0 \\ & 3y_1 & = & 2 \\ & y_1 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{llclcl} \text{Max}\, w = & 3y_1 & + & 11y_2 & & \\ \text{s.c.} & -3y_1 & + & y_2 & \leq & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Problème 2

a) Définissons les variables de décision :

x_1 nombre de fusées de type rosace produites ;

x_2 nombre de fusées de type étoile produites ;

x_3 nombre de fusées de type fontaine produites.

Le plan de production maximisant le chiffre d'affaires est solution du problème linéaire :

$$\begin{array}{llrcrcrcr} \text{Max} & z = & 48x_1 & + & 36x_2 & + & 90x_3 & & \\ \text{s.c.} & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & \leq & 3000 \\ & & 100x_1 & + & 150x_2 & + & 100x_3 & \leq & 100000 \\ & & 20x_1 & + & 10x_2 & + & 40x_3 & \leq & 12000 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

b) Son dual est

$$\begin{array}{llrcrcrcr} \text{Min} & w = & 3000y_1 & + & 100000y_2 & + & 12000y_3 & & \\ \text{s.c.} & & 4y_1 & + & 100y_2 & + & 20y_3 & \geq & 48 \\ & & 2y_1 & + & 150y_2 & + & 10y_3 & \geq & 36 \\ & & 12y_1 & + & 100y_2 & + & 40y_3 & \geq & 90 \\ & & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

c) Après résolution du problème primal avec l'algorithme du simplexe, on obtient le tableau optimal suivant :

$$T_{opt} = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & -1/20 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/100 & -1/10 & 550 \\ 1 & 0 & 0 & -5/8 & -1/200 & 1/5 & 25 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3/25 & 3/2 & 34500 \end{array}$$

Le plan consiste donc à produire

$x_1^* = 25$ fusées de type rosace,

$x_2^* = 550$ fusées de type étoile,

$x_3^* = 150$ fusées de type fontaine,

pour un chiffre d'affaires de $z^* = 34500$.-.

d) Le coût marginal associé à la poudre est de 3/25 et celui associé au carton est de 3/2. Il est donc préférable d'essayer d'investir en premier dans la quantité de carton disponible, car pour une augmentation égale, l'impact sur le chiffre d'affaires sera plus important.

Problème 3

Les tableaux T_1, T_2, T_3 et T_4 ont les caractéristiques suivantes :

a) T_1 : Les variables basiques primales sont x_2, x_4 et x_5. La solution basique primale est $x_2^* = x_4^* = x_5^* = 0$ (*cf.* dernière colonne du tableau) et $x_1^* = x_3^* = x_6^* = 0$ (variables hors base). La valeur de la solution basique primale est $z^* = 0$.

T_2 : Les variables basiques primales sont x_1 et x_3. La solution basique primale est $x_1^* = -4$, $x_3^* = 3$ (*cf.* dernière colonne du tableau) et $x_2^* = x_4^* = 0$ (variables hors base). La valeur de la solution basique primale est $z^* = 20$.

T_3 : Les variables basiques primales sont x_1, x_3, x_6. La solution basique primale est $x_1^* = 6$, $x_3^* = 4$, $x_6^* = 2$ (*cf.* dernière colonne du tableau) et $x_2^* = x_4^* = x_5^* = 0$ (variables hors base). La valeur de la solution basique primale est $z^* = -60$.

T_4 : Les variables basiques primales sont x_3, x_4 et x_5. La solution basique primale est $x_3^* = 4$, $x_4^* = 1$, $x_5^* = 3$ (*cf.* dernière colonne du tableau) et $x_1^* = x_2^* = 0$ (variables hors base). La valeur de la solution basique primale est $z^* = 0$.

b)

		T_1	T_2	T_3	T_4
i)	primal-admissible	☑	☐	☑	☑
ii)	dual-admissible	☐	☑	☑	☐
iii)	optimal	☐	☐	☑	☐
iv)	primal-non borné	☑	☐	☐	☐
v)	dual-non borné	☐	☑	☐	☐
vi)	primal-dégénéré	☑	☐	☐	☐
vii)	dual-dégénéré	☐	☐	☐	☑

Problème 4

a)

$$
\begin{array}{llrcrcl}
 & & & \text{(PLP)} & & & \\
\text{Min} & w = & y_1 & & & & \\
\text{s.c.} & & -y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & & y_1 & - & \frac{1}{2}y_2 & \geq & 1 \\
 & & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcrcl}
 & & & \text{(PLD)} & & & \\
\text{Max} & z = & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.c.} & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 0 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Le (PLP) et le (PLD) admettent des optima finis $z^* = w^* = 3$ avec $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $y_1 = 3$ et $y_2 = 4$.

b)

$$\begin{array}{llrcrcr}
 & & \text{(PLP)} & & & & \\
\text{Min} & w = & -y_1 & & & & \\
\text{s.c.} & & -y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & & y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcrcr}
 & & \text{(PLD)} & & & & \\
\text{Max} & z = & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.c.} & & -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Le (PLP) n'a pas de solution admissible et le (PLD) ne possède pas de fonction objectif bornée inférieurement.

c)

$$\begin{array}{llrcrcr}
 & & \text{(PLP)} & & & & \\
\text{Min} & w = & -y_1 & & & & \\
\text{s.c.} & & -y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 0 \\
 & & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcrcr}
 & & \text{(PLD)} & & & & \\
\text{Max} & z = & x_1 & & & & \\
\text{s.c.} & & -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Le (PLP) et le (PLD) n'ont pas de solutions admissibles.