Corrigé 5

Problème 1

Posons le problème auxiliaire suivant :

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcl}
\text{Min} & z = & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 1 \\
& & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
& & -3x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}.
$$

Après avoir introduit les variables artificielles x_4, x_5 et x_6, on cherche une solution admissible de notre problème à l'aide d'une phase 1 de l'algorithme du simplexe.

$$
T_0 = \begin{array}{|cccccc|c|}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \multicolumn{1}{c}{x_6} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & \mathbf{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc}
\theta & \\
 & \\
1 & \leftarrow \\
3 & \\
 &
\end{array}
$$

$$
T_1 = \begin{array}{|cccccc|c|}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \multicolumn{1}{c}{x_6} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-5/2 & 0 & \mathbf{1/2} & 1 & 1/2 & 0 & 2 \\
-1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\
-5/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 2 \\
\hline
5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc}
\theta & \\
4 & \leftarrow \\
 & \\
4 & \\
 &
\end{array}
$$

$$
T_2 = \begin{array}{|cccccc|c|}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \multicolumn{1}{c}{x_6} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
-5 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\
-3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Il faut désormais sortir la variable artificielle x_6 de la base. Il n'existe pas de variable du problème original qui ait un coefficient non nul sur la 3ième ligne de ce tableau. Dès lors, on conclut que la matrice A n'est pas de rang plein. En effet, la dernière contrainte est redondante. On élimine donc cette contrainte et par conséquent la ligne du tableau qui lui est associée. On obtient alors le tableau suivant :

$$T_3 = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline -5 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Toutes les variables artificielles ont quitté la base et nous avons obtenu le tableau optimal du problème auxiliaire. La phase I du simplexe est donc terminée. On obtient le tableau initial du problème de départ en supprimant les colonnes relatives aux variables artificielles et en calculant les coûts réduits initiaux :

$$T_0 = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -5 & 0 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 10 & 0 & 0 & -10 \end{array}$$

Ce tableau est optimal.
La solution optimale du problème est $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 4$, pour une valeur optimale de la fonction objectif de $z = 10$.

Problème 2

Après avoir introduit les variables d'écart x_4 et x_5, on obtient le tableau initial suivant :

$$T_0 = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 10 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ce tableau n'étant pas admissible, on applique une phase I: on multiplie par -1 la 1ère contrainte pour que $b \geq 0$, on introduit les variables artificielles y_1 et y_2 et la fonction objectif $z' = y_1 + y_2$ du problème auxiliaire que l'on va chercher à minimiser

$$T_0^{\text{aux}} = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & \\ \hline \mathbf{1} & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ \hline -2 & -3 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & -11 \end{array}$$

Ensuite on applique l'algorithme phase II au problème auxiliaire :

$$T_1^{\text{aux}} = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & \\ \hline 1 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ \hline 0 & -1 & -4 & -1 & -1 & 2 & 0 & -9 \end{array}$$

$$T_2^{\text{aux}} = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & \\ \hline 1 & 1 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 & -2 & 1 & 8 \\ \hline 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 3 & 0 & -8 \end{array}$$

$$T_3^{\text{aux}} = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & y_2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & \mathbf{5} & 1 & -5 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 0 & -5 & -1 & 6 & 0 & -5 \end{array}$$

$T_4^{\text{aux}} =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
1/5	2/5	1	0	1/5	0	1/5	2
-4/5	-3/5	0	1	1/5	-1	1/5	1
0	0	0	0	0	11	1	0

Ce tableau est optimal pour la fonction objectif z'. De plus, comme $z' = 0$ et les variables artificielles y_1 et y_2 sont hors base, on obtient un tableau initial admissible pour le problème initial en biffant les colonnes correspondant à y_1 et y_2, et en mettant à jour les coûts réduits.

$T_0 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1/5	**2/5**	1	0	1/5	2
-4/5	-3/5	0	1	1/5	1
4/5	-12/5	0	0	-1/5	-2

On applique l'algorithme phase II au problème :

$T_1 =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1/2	1	5/2	0	1/2	5
-1/2	0	3/2	1	1/2	4
2	0	6	0	1	10

Ce tableau est optimal et la solution du problème est $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 0$, et $z = -10$.

Problème 3

a) Le tableau initial de l'algorithme du simplexe est :

$T_0 =$

x_1	x_2	x_3	
-1	1	0	-4
1	0	1	2
-1	0	0	0

Ce tableau n'étant pas admissible, on effectue une phase I : on multiplie par -1 la première contrainte (1ère ligne du tableau) et on introduit une variable artificielle x_0 dans la 1ère contrainte :

$T_0^{\text{aux}} =$

x_0	x_1	x_2	x_3	
1	1	-1	0	4
0	**1**	0	1	2
0	-1	1	0	-4

Remarque : On aurait aussi pu introduire deux variables artificielles, une par contrainte.

$T_1^{\text{aux}} =$

x_0	x_1	x_2	x_3	
1	0	-1	-1	2
0	1	0	1	2
0	0	1	1	-2

La phase I est terminée mais la valeur optimale de la fonction auxiliaire n'est pas nulle. Le problème initial n'a donc pas de solution admissible.

b) Le tableau initial est :

$T_0 =$

x_1	x_2	x_3	
-1	1	0	-4
1	0	1	6
-1	0	0	0

et celui de la phase I est :

$T_0^{\text{aux}} =$

x_0	x_1	x_2	x_3	
1	**1**	-1	0	4
0	1	0	1	6
0	-1	1	0	-4

$T_1^{\text{aux}} =$

x_0	x_1	x_2	x_3	
1	1	-1	0	4
-1	0	1	1	2
1	0	0	0	0

La phase I est terminée. Après suppression de la variable x_0 et mise à jour des coûts réduits, on obtient un tableau admissible pour le problème initial :

$T_1 =$

x_1	x_2	x_3	
1	-1	0	4
0	**1**	1	2
0	-1	0	4

$T_2 =$

x_1	x_2	x_3	
1	0	1	6
0	1	1	2
0	0	1	6

Le tableau T_2 est optimal. La solution optimale du problème est $z^* = -6$, $x_1^* = 6$ ($x_2^* = 2, x_3^* = 0$).