

SÉRIE D'EXERCICES 4

- Problème-type :
1)
- Problèmes à résoudre :
2) 3)
- Problèmes supplémentaires :
4)

Problème 1

Soit le problème suivant :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } z = & -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\
 \text{s.c.} & \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
 & \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\
 & \phantom{\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - } x_3 \leq 0 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

On obtient le tableau initial suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ	
$T_0 =$	1/4	-8	-1	9	1	0	0	0	←
	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0	
	0	0	1	0	0	0	1	0	
	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0	∞

↑

Appliquons trois itérations de l'algorithme du simplexe :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ	
$T_1 =$	1	-32	-4	36	4	0	0	0	-
	0	4	3/2	-15	-2	1	0	0	←
	0	0	1	0	0	0	1	0	
	0	-4	-7/2	33	3	0	0	0	∞

↑

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ		
$T_2 =$	1	0	8	-84	-12	8	0	0	0	←
	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0	0	0	
	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
	0	0	-2	18	1	1	0	0		

↑

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ		
$T_3 =$	1/8	0	1	-21/2	-3/2	1	0	0	-	
	-3/64	1	0	3/16	1/16	-1/8	0	0	0	←
	-1/8	0	0	21/2	3/2	-1	1	0	0	
	1/4	0	0	-3	-2	3	0	0		

↑

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ		
$T_4 =$	-5/2	56	1	0	2	-6	0	0	0	←
	-1/4	16/3	0	1	1/3	-2/3	0	0	0	
	5/2	-56	0	0	-2	6	1	0	-	
	-1/2	16	0	0	-1	1	0	0		

↑

- (a) Continuer l'algorithme en introduisant successivement dans la base la variable hors base x_5 , puis la variable hors base x_6 .
- (b) Qu'en déduisez-vous ?

Problème 2

Soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z &= -x_1 - x_2 - x_3 \\
 \text{s.c. } & \quad 3x_1 - x_2 \leq 9 \\
 & \quad -x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
 & \quad -x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- (1) Mettre ce problème sous forme standard.
- (2) Résoudre le problème obtenu avec l'algorithme du simplexe en utilisant le tableau. Spécifier à chaque itération de l'algorithme les variables en base ainsi que (x, θ, d) tel que $x^+ = x + \theta d$.

Problème 3

Pour chacun des tableaux admissibles suivants, déterminer le prochain pivot sélectionné par l'algorithme du simplexe. Dans chaque cas, utiliser la règle de Bland pour départager les candidats.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$T_1 =$	1	4	1	0	3	0	5
	0	-2	2	1	5	0	4
	0	7	2/3	0	8	1	2
	0	10	-5	0	3	0	23

$$T_2 = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline & 0 & -6 & 0 & -3/2 & -1 & 1 & 2 \\ & 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 23 \\ & 0 & 2 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & -2 & 3/2 & 0 & 12 \end{array}$$

$$T_3 = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ & -2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \end{array}$$

$$T_4 = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline & 5 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ & -3 & 0 & 1 & -7 & 5 & 0 & 14 \\ & 2 & 1 & 0 & 8 & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 8 & 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -4 \end{array}$$

$$T_5 = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3 & 10 \\ & 0 & -4 & 0 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ & 0 & 5 & 1 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ \hline & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 20 \end{array}$$

$$T_6 = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline & 3 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ \hline & -8 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

Problème 4

Un grand-oncle riche âgé de 90 ans décide d'aller chez le notaire pour établir son héritage. Parmi ses héritiers il a trois petits-neveux, André, Blaise et Claude, aux habitudes un peu particulières. Il désire leur léguer au maximum 100'000 Frs, mais il ne sait pas comment les répartir. Le notaire qui est aussi féru de recherche opérationnelle pose des questions au grand-oncle pour déterminer les habitudes des petits-neveux. Il ressort de son enquête qu'en une année André dépense en général 40% de son avoir, Blaise 30% de son avoir et Claude 20%. L'argent qu'ils ne dépensent pas est investi de la manière suivante : André l'investit dans sa nouvelle entreprise, qui est très rentable, à 50/3%, Blaise en actions à 300/7% et Claude le met sous son oreiller, il n'a donc aucun rendement. Un autre souhait du grand-oncle est que la somme dépensée par chacun de ses trois petits-neveux n'excède pas 10'000 Frs. Le grand-oncle souhaite bien sûr que la somme totale restant à ses petits-neveux à la fin de l'année soit maximale.

- a) Aider le notaire à poser le P.L. du problème. *Remarque : on suppose que les petits-neveux reçoivent l'héritage au premier janvier et on calculera l'intérêt du l'argent placé le 31 décembre, c'est-à-dire à la fin des dépenses.* Mettre le problème sous forme canonique et standard.
- b) Résoudre le problème à l'aide de la méthode du simplexe.