Corrigé 4

Problème 1

(a) En introduisant successivement la variable x_5 et x_6 et, en effectuant les pivotages associés, on retrouve le tableau T_0.

(b) En forçant l'ordre d'introduction des variables hors base, la règle de Bland n'a pas été respectée et l'algorithme du simplexe a cyclé.

Problème 2

(1) On introduit les variables d'écart x_4, x_5 et x_6 :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcl}
\text{Min} & z = & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 9 \\
 & & -x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 8 \\
 & & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

(2) On obtient le tableau initial suivant :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \end{array} \qquad \theta \\
T_0 = & \begin{array}{|cccccc|c|} \hline \mathbf{3} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 3 \quad \leftarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \uparrow
\end{array}$$

La base est (x_4, x_5, x_6).

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \end{array} \qquad \theta \\
T_1 = & \begin{array}{|cccccc|c|} \hline 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{11/3} & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -4/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -4/3 & -1 & 1/3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \\ 3 \quad \leftarrow \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \qquad \uparrow
\end{array}$$

La base est (x_1, x_5, x_6).

$$x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcccccccccl} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & & \theta & \\ \cline{2-8} & \multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & 0 & 4/11 & 1/11 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{4} & & & \\ T_2 = & \multicolumn{1}{|c}{0} & 1 & 0 & 1/11 & 3/11 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{3} & & & \\ & \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & \mathbf{1} & 5/11 & 4/11 & 1 & \multicolumn{1}{|c|}{8} & & 8 & \leftarrow \\ \cline{2-8} & \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & \text{-1} & 5/11 & 4/11 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{7} & & & \\ \cline{2-8} & & & \uparrow & & & & & & & \end{array}$$

La base est (x_1, x_2, x_6).

$$x^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -11/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \cline{2-8} & \multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & 0 & 4/11 & 1/11 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{4} \\ T_3 = & \multicolumn{1}{|c}{0} & 1 & 0 & 1/11 & 3/11 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ & \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & 1 & 5/11 & 4/11 & 1 & \multicolumn{1}{|c|}{8} \\ \cline{2-8} & \multicolumn{1}{|c}{0} & 0 & 0 & 10/11 & 8/11 & 1 & \multicolumn{1}{|c|}{15} \\ \cline{2-8} \end{array}$$

La base est (x_1, x_2, x_3).

$$x^+ = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tous les coûts réduits étant positifs, ce tableau est optimal. La solution optimale est $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 8$, pour une valeur optimale de la fonction objectif de $z^* = -15$.

Problème 3

En appliquant la règle de Bland, on trouve les pivots suivants.

$$
\begin{array}{r|cccccc|c|cc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \theta & \\
\hline
 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 5 & \\
 & 0 & -2 & \mathbf{2} & 1 & 5 & 0 & 4 & 2 & \leftarrow \\
T_1 = & 0 & 7 & 2/3 & 0 & 8 & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 0 & 10 & -5 & 0 & 3 & 0 & 23 & & \\
\hline
 & & & \uparrow & & & & & &
\end{array}
$$

Le tableau T_2 est admissible et non borné. On arrête donc l'optimisation, *i.e.* il n'existe pas de prochain pivot.

$$
\begin{array}{r|cccccc|c|cc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \theta & \\
\hline
 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4/7 & \\
T_3 = & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & \\
 & -2 & \mathbf{9} & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \leftarrow \\
\hline
 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & & \\
\hline
 & & \uparrow & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc|c|cc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \theta & \\
\hline
 & 5 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & \\
T_4 = & -3 & 0 & 1 & -7 & 5 & 0 & 14 & - & \\
 & 2 & 1 & 0 & \mathbf{8} & 2 & 0 & 8 & 1 & \leftarrow \\
\hline
 & 8 & 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -4 & & \\
\hline
 & & & & \uparrow & & & & &
\end{array}
$$

Le tableau T_5 est optimal.

$$
\begin{array}{r|cccccc|c|cc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \theta & \\
\hline
 & \mathbf{3} & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & \leftarrow \\
T_6 = & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1/2 & \\
 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & - & \\
\hline
 & -8 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & & \\
\hline
 & \uparrow & & & & & & & &
\end{array}
$$

Problème 4

a) On note

x_1, x_2 et x_3 les milliers de francs qui seront légués respectivement à André, Blaise et Claude ;

d_1, d_2 et d_3 les pourcentages des dépenses respectives d'André, Blaise et Claude ;

r_1, r_2 et r_3 les intérêts des investissements respectifs d'André, Blaise et Claude.

On a donc

	André	Blaise	Claude
d	2/5	3/10	1/5
r	1/6	3/7	0

Pour chaque petit-neveu, on a les relations suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
\text{argent dépensé en une année} & : & d_i \cdot x_i \\
\text{argent restant le 31 décembre} & : & x_i - d_i \cdot x_i \\
\text{intérêt reçu} & : & (x_i - d_i \cdot x_i) \cdot r_i \\
\text{argent après calcul de l'intérêt} & : & (x_i - d_i \cdot x_i) \cdot (1 + r_i)
\end{array}$$

Grâce à ces relations on peut écrire le programme linéaire que le notaire doit résoudre.

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Max} & y = & (1-d_1)(1+r_1)x_1 & + & (1-d_2)(1+r_2)x_2 & + & (1-d_3)(1+r_3)x_3 & & \\
\text{s.c.} & & d_1x_1 & & & & & \leq & 10 \\
 & & & & d_2x_2 & & & \leq & 10 \\
 & & & & & & d_3x_3 & \leq & 10 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Sous forme canonique et avec les valeurs numériques le programme linéaire sécrit

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Min} & z = & -7/10x_1 & - & x_2 & - & 4/5x_3 & & \\
\text{s.c.} & & 2/5x_1 & & & & & \leq & 10 \\
 & & & & 3/10x_2 & & & \leq & 10 \\
 & & & & & & 1/5x_3 & \leq & 10 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Sous forme standard ce programme linéaire sécrit

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\text{Min} & z = & -7/10x_1 & - & x_2 & - & 4/5x_3 & & & & & \\
\text{s.c.} & & 2/5x_1 & & & & & + & x_4 & = & 10 & \\
 & & & & 3/10x_2 & & & + & x_5 & = & 10 & \\
 & & & & & & 1/5x_3 & + & x_6 & = & 10 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_7 & = & 100 & \\
 & & & & & & & & x_i & \geq & 0 & i \in \{1, ..., 7\}
\end{array}$$

b) Après l'application de l'algorithme du simplexe, on trouve $x_1 = 50/3$, $x_2 = 100/3$ et $x_3 = 50$ avec $z = -85$.

En conséquence, le grand-oncle doit donner

$\sim$ 16'666 Frs à André,

$\sim$ 33'333 Frs à Blaise et

50'000 Frs à Claude.

Il va donc leur léguer $\sim$ 100'000 Frs et, à la fin de l'année, il leur restera 85'000 Frs.