EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2009/2010

SÉRIE D'EXERCICES 3

Vous trouverez les énoncés des séries d'exercices, les notes de cours et d'autres informations sur le cours sur le site web :

`http://transp-or2.epfl.ch/cours/RechOp/09-10/`

- Problème-type :
  1)
- Problèmes à résoudre :
  2) 3.a) 3.b) 3.c)
- Problèmes supplémentaires :
  3.d) 3.e)

Problème 1

Soit le problème de minimisation suivant:

$$\begin{array}{rcrcrl} \text{Min } z & = & x_1 & + & x_2 & \\ s.c. & & 2x_1 & + & x_2 & \leq 8 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

(a) Mettre ce problème sous forme standard en ajoutant les variables d'écart x_3 et x_4.

(b) Représenter graphiquement le problème.

(c) Pour la base dont les indices de base sont 1 et 4, déterminer toutes les directions de base d_j ainsi que les pas θ_j associés.

(d) Pour la base dont les indices de base sont 2 et 3, déterminer toutes les directions de base d_j ainsi que les pas θ_j associés.

(e) Représenter sur le graphique les directions calculées en (c).

(f) Représenter sur le graphique les directions calculées en (d).

Problème 2

a) Déterminer toutes les bases de l'espace des colonnes de la matrice du système suivant. Donner également les solutions basiques associées.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & & & = & 4 \end{array} \right.$$

b) Pour une matrice 2×5, quel est le nombre maximal de bases possible ?

c) Pour une matrice $3 \times n, n \geq 3$, quel est le nombre maximal de bases possible ? Pour tout $n \geq 3$, donner un exemple d'une matrice possédant ce nombre maximal de bases.

Problème 3

Soit le système d'équations linéaires $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ avec

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer toutes les bases de l'espace des colonnes $\mathcal{C}(\boldsymbol{A})$ uniquement composées de colonnes de la matrice $\boldsymbol{A}$.

b) Pour une base $\boldsymbol{B}$ de $\mathcal{C}(\boldsymbol{A})$, la solution unique du système, obtenue en fixant à zéro les variables associées aux colonnes n'appartenant pas à la base $\boldsymbol{B}$, est appelée *solution basique* associée à $\boldsymbol{B}$. Pour chacune des bases précédentes, calculer la solution basique associée.

c) Représenter graphiquement, les projections des solutions basiques du point b) ainsi que les projections des deux équations du système dans le repère Ox_1x_2.

d) Une solution de base est dite *admissible* si toutes ses composantes sont positives ou nulles. Identifier, dans le graphique précédent, la projection de l'ensemble des solutions admissibles du système et classifier les solutions basiques en admissibles et non admissibles.

e) Un graphe $G(V, E)$ est formé de l'ensemble $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés *sommets* et de l'ensemble $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés *arêtes*. On dira que deux sommets a et b sont *adjacents* s'ils sont reliés par une arête. Un graphe peut être représenté par un dessin. À chaque sommet de G on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les sommets adjacents.

Dessiner le graphe dont les sommets sont les bases trouvées sous a) et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si on peut passer d'une base à l'autre par un pivotage dans le tableau du simplexe.

February 17, 2010 – mbi/mfe