EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2009/2010

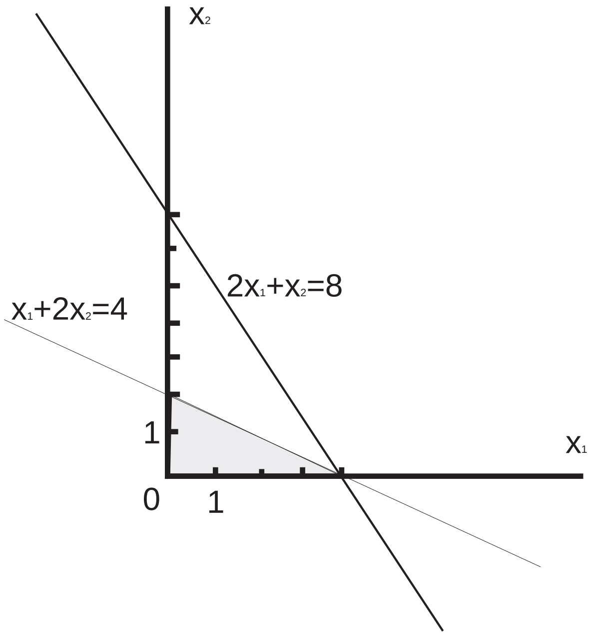
Corrigé 3

Problème 1

(a) On introduit les variables d'écart x_3 et x_4:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} \text{Min } z & = & x_1 & + & x_2 & & & & & \\ s.c. & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 8 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

(b)



(c) Base (x_1, x_4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Direction correspondant à x_2:

$$d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ -\frac{x_4}{d_4} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta^* = 0$$

Direction correspondant à x_3:

$$d_B = -B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ d_4 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta^* = 8$$

(d) Base (x_2, x_3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

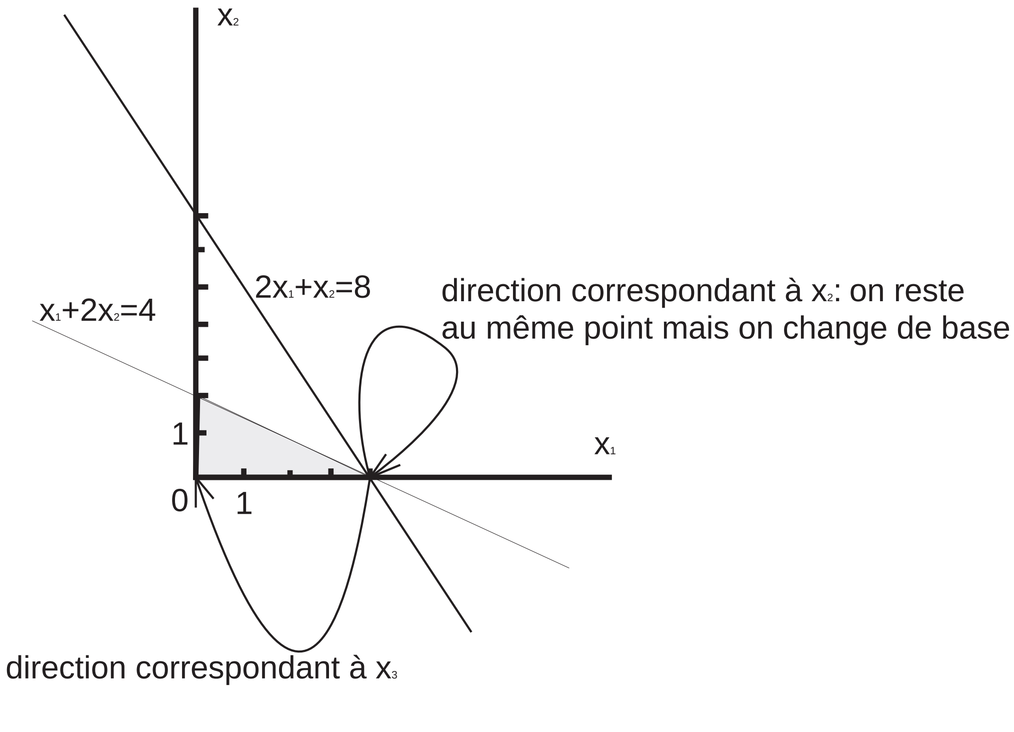
Direction correspondant à x_1:

$$d_B = -B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ -\frac{x_3}{d_3} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

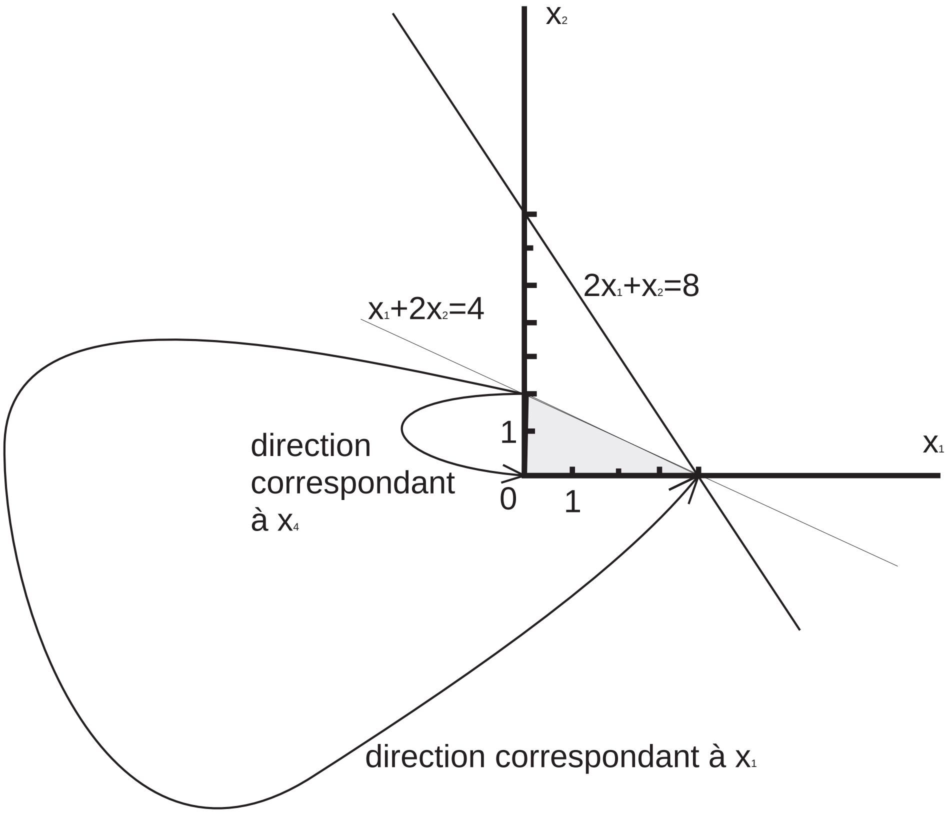
Direction correspondant à x_4:

$$d_B = -B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ d_3 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

(e)



(f)



Problème 2

a) La matrice du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

et toute base de cette matrice est formée d'une des quatre premières colonnes et de la cinquième. Les quatre bases et les solutions basiques associées sont donc

1. $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T = (2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)^T$
2. $\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1)^T$
3. $\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T = (0 \quad 0 \quad 2/3 \quad 0 \quad -1)^T$
4. $\boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad -1)^T$

b) Pour une matrice 2×5, le nombre maximal de bases est $\binom{5}{2}$, c'est-à-dire 10.

c) Pour une matrice $3 \times n$, le nombre maximal de bases est $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$. La matrice suivante possède ce nombre de bases

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & k^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Preuve : Tout choix de trois colonnes différentes définit une sous-matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & j & k \\ i^2 & j^2 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est une matrice de Vandermonde dont le déterminant est égal à

$$(k-i)(k-j)(j-i) \neq 0 \quad \text{car} \quad i \neq j \neq k.$$

Problème 3

a) Les 6 bases de $\mathcal{C}(\boldsymbol{A})$ sont :

$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

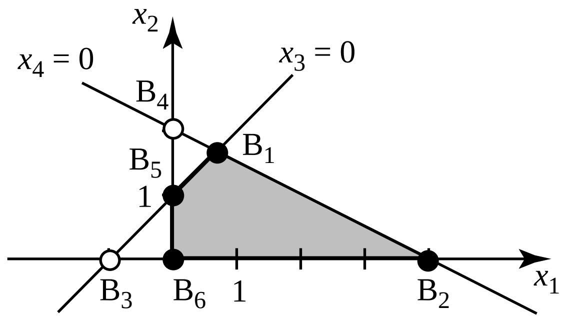
$\boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boldsymbol{B}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boldsymbol{B}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Les 6 solutions basiques associées sont :

$\boldsymbol{x}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0)^T$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_2 = (4, 0, 5, 0)^T$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_3 = (-1, 0, 0, 5)^T$

$\boldsymbol{x}_4 = (0, 2, -1, 0)^T$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_5 = (0, 1, 0, 2)^T$ $\quad$ $\boldsymbol{x}_6 = (0, 0, 1, 4)^T$

c)



d) La région admissible est représentée en grisé, les solutions basiques admissibles par des points noirs et celles non admissibles par des points blancs.

e) Graphe des solutions basiques (admissibles ou non) adjacentes.