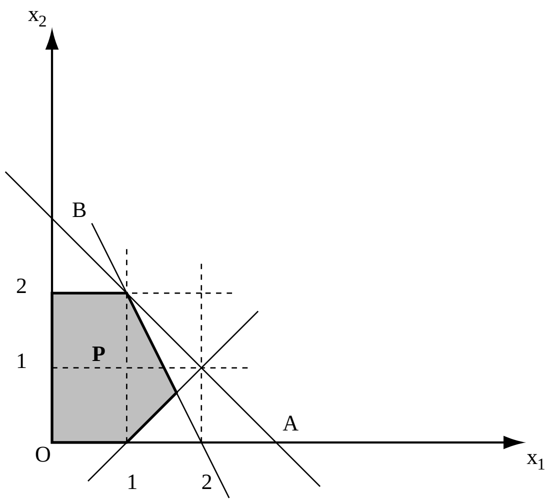
corrige 2

Problème 1

a) Il faut trouver le point de la région **P** qui maximise $z = x_1 + x_2$:

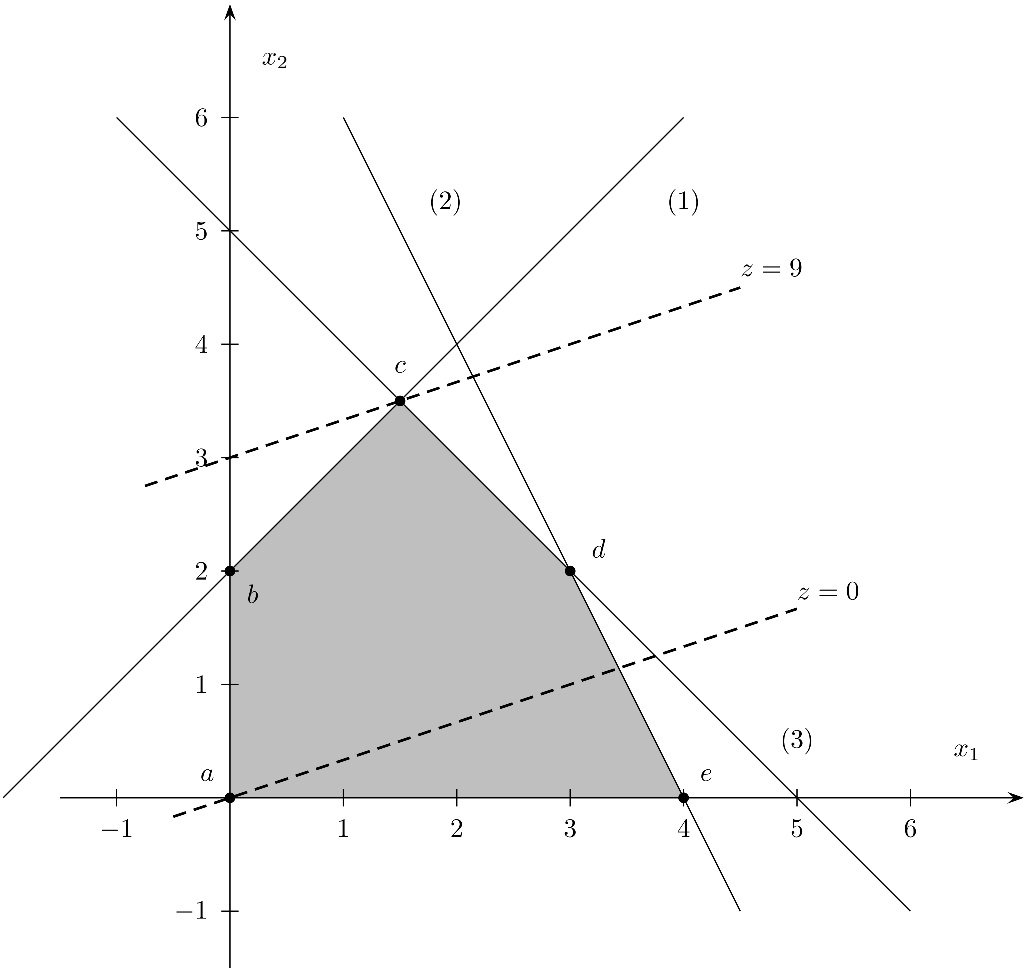
$$\begin{array}{rrcrcl}
\text{Max } z & = & x_1 & + & x_2 & \\
s.c. & & x_1 & - & x_2 & \leq 1 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq 4 \\
& & & & x_2 & \leq 2 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b) En rapprochant la droite passant par AB de la région **P**, on finit par toucher le point (1,2) de la région, qui maximise $x_1 + x_2$:



Problème 2

a) Dans le graphe ci-dessous, la zone grisée représente le domaine des solutions admissibles.



b) Les points extrêmes du domaine admissible sont :

$$a = (0,0),\ b = (0,2),\ c = (1.5, 3.5),\ d = (3,2) \text{ et } e = (4,0).$$

c) On a représenté deux lignes de niveau de la fonction objectif z : $z = 0$ et $z = 9$. En translatant la ligne de niveau de la fonction objectif correspondant à $z = 0$ le plus loin possible dans la direction opposée du gradient (on minimise) tout en restant admissible, on constate que le point extrême que l'on atteint est c. Il correspond donc à l'optimum. La valeur optimale du problème est $z^* = 9$ et la solution optimale correspondante est $x_1^* = 1.5$ et $x_2^* = 3.5$.

d) Le problème linéaire sous forme canonique :

$$\begin{array}{lcrcrcl}
\text{Min } z & = & x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{s.c.} & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Mettons-le sous forme standard :

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcrcl}
\text{Min } z & = & x_1 & - & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 8 \\
 & & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Problème 3

a) Soient les variables de décision :

$$\begin{array}{lcl} x_1 & : & \text{nombre de tonnes produites avec traitement des déchets} \\ x_2 & : & \text{nombre de tonnes produites sans traitement des déchets} \end{array}$$

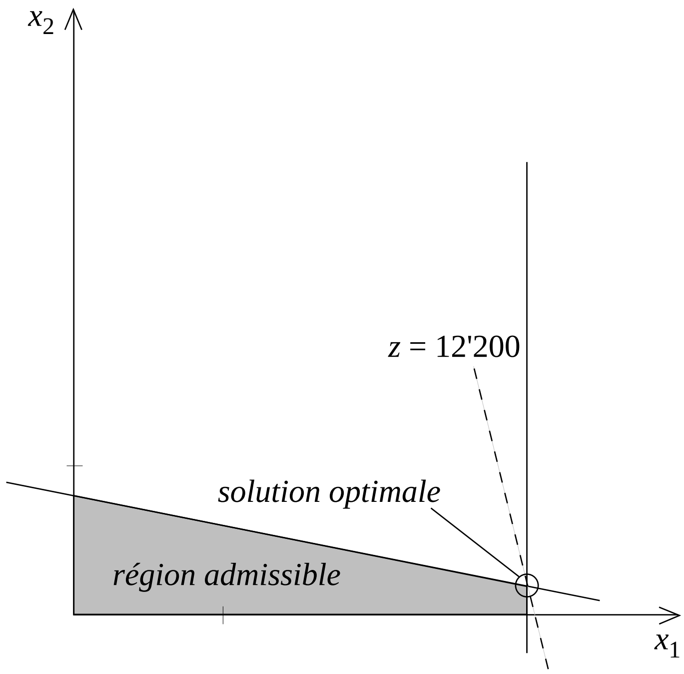
Le problème linéaire à résoudre est :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } z & = & -3000x_1 - 2.5(3000 \cdot 0.2x_1 + 3000x_2) + 11000(x_1 + x_2) - 2500(x_1 + x_2) \\ s.c. & & 3000x_1 \qquad\qquad\qquad \leq \ 9000 \\ & & 3000 \cdot 0.2x_1 \ + \ 3000x_2 \ \leq \ 2400 \\ & & \qquad\qquad\qquad x_1, x_2 \ \geq \ 0 \end{array}$$

qui s'écrit après simplification et sous forme canonique :

$$\begin{array}{rcrcrcl} \text{Min } z & = & -4000x_1 & - & 1000x_2 & & \\ s.c. & & 3000x_1 & & & \leq & 9000 \\ & & 600x_1 & + & 3000x_2 & \leq & 2400 \\ & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b) La région admissible du problème est



et la solution optimale du problème linéaire est :

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0.2 \text{ et } z = 12\text{'}200 \text{ Frs.}$$

Pour atteindre le profit maximum de 12'200 Frs., l'entreprise doit fabriquer 3.2 ($= x_1 + x_2$) tonnes de leur produit et déverser 600 ($= 3000x_2$) litres de déchets sans traitement. (Un maximum de déchets, soit 9000 ($= 3000x_1$) litres, sont traités.)

c) Considérons chacune des hypothèses successivement :

Linéarité : Si la description du processus de production est fiable (proportionnalité entre les quantités de déchets et de produits finis, rendement fixe de la station d'épuration), les contraintes et la fonction objectif sont linéaires.

Divisibilité : La divisibilité des litres de déchets ne pose pas de problème. Pour celle du produit final, l'énoncé n'en précise pas la nature mais il est, *a priori*, possible de diviser des tonnes et donc d'utiliser une variable réelle pour la modélisation.

Déterminisme des données : Les données les plus « suspectes » du modèle sont le prix unitaire de traitement (surtout si la station d'épuration appartient à l'entreprise) et le prix de vente du produit final (il n'est pas évident que toute la production puisse être écoulée à un prix fixe).

March 2, 2010 – mbi/mfe