EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2009/2010

Corrige 1

Problème 1

Les variables de décision sont x_p, x_k et x_g. Elles représentent, pour chacun des 3 types de fruits, la quantité à acheter, en hectogrammes. Étant donné qu'il est nécessaire d'avoir 1 kg de dessert, on a

$$x_p + x_k + x_g = 10$$

La fonction objectif est le prix d'achat des fruits à minimiser. Elle s'exprime par

$$z = 4.5x_p + 3.8x_k + 2.6x_g$$

La quantité de glucides à ne pas dépasser est donnée par

$$11.3x_p + 9.0x_k + 18.3x_g \leq 100$$

car la quantité de salade de fruits à préparer est 1 kg.
Pour la quantité de fer, on a

$$0.9x_p + 0.7x_g \geq 8$$

et finalement pour la vitamine C

$$4x_p + 15x_k + 30x_g \geq 150$$

Les variables de décisions sont continues et non négatives.
Le problème linéaire est donc

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Min} & z = & 4.5x_p + 3.8x_k + 2.6x_g & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_p & + & x_k & + & x_g & = & 10 \\
& & 11.3x_p & + & 9.0x_k & + & 18.3x_g & \leq & 100 \\
& & 0.9x_p & & & + & 0.7x_g & \geq & 8 \\
& & 4x_p & + & 15x_k & + & 30x_g & \geq & 150 \\
& & x_p & , & x_k & , & x_g & \geq & 0
\end{array}$$

Problème 2

La i^{e} erreur de mesure est égale à $|\hat{p} - p_i|$.

a) Supposant les poids non négatifs, minimiser le maximum des erreurs de mesure revient donc à chercher la valeur $\hat{p}$ solution du problème

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & z = & \max_{1 \leq i \leq m} \{|\hat{p} - p_i|\} \\
\text{s.c.} & & \hat{p} \geq 0
\end{array}$$

Ce problème est équivalent à

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z = & \varepsilon \\ \text{s.c.} & & \varepsilon \geq |\hat{p} - p_i| \qquad i = 1, \ldots, m \\ & & \varepsilon \geq 0 \\ & & \hat{p} \geq 0 \end{array}$$

qui est lui-même équivalent au problème linéaire

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & z = & \varepsilon & \\ \text{s.c.} & & \varepsilon \geq \hat{p} - p_i & i = 1, \ldots, m \\ & & \varepsilon \geq -\hat{p} + p_i & i = 1, \ldots, m \\ & & \varepsilon \geq 0 & \\ & & \hat{p} \geq 0 & \end{array}$$

b) Supposant les poids non négatifs, minimiser la somme des erreurs de mesure revient donc à chercher la valeur $\hat{p}$ solution du problème

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} |\hat{p} - p_i| \\ \text{s.c.} & & \hat{p} \geq 0 \end{array}$$

Posant $\varepsilon_i = |\hat{p} - p_i|$, pour $i = 1, \ldots, m$, le problème est équivalent à

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i & \\ \text{s.c.} & & \varepsilon_i = |\hat{p} - p_i| & i = 1, \ldots, m \\ & & \varepsilon_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m \\ & & \hat{p} \geq 0 & \end{array}$$

qui est équivalent à

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i & \\ \text{s.c.} & & \varepsilon_i \geq |\hat{p} - p_i| & i = 1, \ldots, m \\ & & \varepsilon_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m \\ & & \hat{p} \geq 0 & \end{array}$$

qui est lui-même équivalent au problème linéaire

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i & \\ \text{s.c.} & & \varepsilon_i \geq \hat{p} - p_i & i = 1, \ldots, m \\ & & \varepsilon_i \geq -\hat{p} + p_i & i = 1, \ldots, m \\ & & \varepsilon_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m \\ & & \hat{p} \geq 0 & \end{array}$$

Problème 3

a) Soit $x_{i,j}$ le nombre d'ouvriers engagés pour travailler de l'heure i à l'heure j, les couples ordonnés (i, j) appartenant à l'ensemble $\{(24, 12), (06, 18), (12, 24), (18, 06)\}$. Sous forme d'un problème d'optimisation linéaire, le problème devient alors :

$$
\begin{array}{llccccccccc}
\text{Minimiser} & z = & x_{24,12} & + & x_{06,18} & + & x_{12,24} & + & x_{18,06} & & \\
\text{s.c.} & & x_{24,12} & & & & & + & x_{18,06} & \geq & b_{24,06} \\
& & x_{24,12} & + & x_{06,18} & & & & & \geq & b_{06,12} \\
& & & & x_{06,18} & + & x_{12,24} & & & \geq & b_{12,18} \\
& & & & & & x_{12,24} & + & x_{18,06} & \geq & b_{18,24} \\
& & x_{24,12} & , & x_{06,18} & , & x_{12,24} & , & x_{18,06} & \geq & 0
\end{array}
$$

February 24, 2010 – mbi/mfe