ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation en nombres entiers

Recherche Opérationnelle
GC-SIE

Branch & bound

Algorithmes

On distingue 3 types d'algorithmes

1. Algorithmes exacts
   – Ils trouvent la solution optimale
   – Ils peuvent prendre un nombre exponentiel d'itérations
2. Algorithmes d'approximation
   – Ils produisent une solution sous-optimale.
   – Ils produisent une mesure de qualité de la solution.
   – Ils ne prennent pas un nombre exponentiel d'itérations.

Algorithmes

3. Algorithmes heuristiques
   – Ils produisent une solution sous-optimale.
   – Ils ne produisent pas de mesure de qualité de la solution.
   – En général, ils ne prennent pas un nombre exponentiel d'itérations.
   – On observe empiriquement qu'ils trouvent une bonne solution rapidement.

Relaxation

- Soit un programme linéaire mixte en nombres entiers

$$\min c^Tx + d^Ty + e^Tz$$

s.c.

$$Ax + By + Cz = b$$
$$x,y,z \geq 0$$
$$y \text{ entier}$$
$$z \in \{0,1\}$$

Relaxation

- Le programme linéaire

$$\min c^Tx + d^Ty + e^Tz$$

s.c.

$$Ax + By + Cz = b$$
$$x,y \geq 0$$
$$0 \leq z \leq 1$$

est appelé sa relaxation linéaire.

Branch & Bound

Idées :

- Diviser pour conquérir
- Utilisation de bornes sur le coût optimal pour éviter d'explorer certaines parties de l'ensemble des solutions admissibles.

Branch & Bound

Branch

- Soit F l'ensemble des solutions admissibles d'un problème

$$\min c^T x$$
$$\text{s.c. } x \in F$$

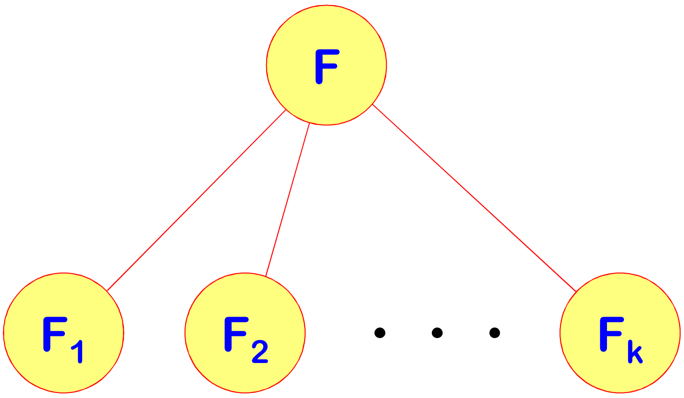
- On partitionne F en un une collection finie de sous-ensembles $F_1,\ldots,F_k$.
- On résout séparément les problèmes

$$\min c^T x \;\; \text{s.c. } x \in F_i$$

- Par abus de langage, ce problème sera appelé F_i également.

Branch & Bound

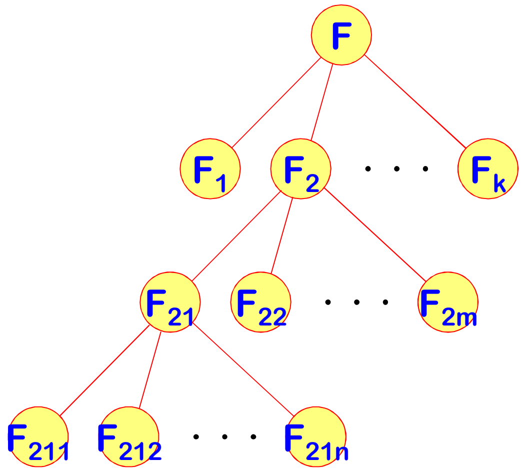
- Représentation :



Branch & Bound

- A priori, les sous-problèmes peuvent être aussi difficiles que le problème original.
- Dans ce cas, on applique le même système.
- On partitionne le/les sous-problèmes.

Branch & Bound



Branch & Bound

Bound :

- On suppose que pour chaque sous-problème

$$\min c^T x \text{ s.c. } x \in F_i$$

  on peut calculer efficacement une borne inférieure $b(F_i)$ sur le coût optimal, i.e.

$$b(F_i) \leq \min_{x \in F_i} c^T x$$

- Typiquement, on utilise la relaxation linéaire pour obtenir cette borne

Branch & Bound

Algorithme général :

- A chaque instant, on maintient
  - une liste de sous-problèmes actifs,
  - le coût U de la meilleure solution obtenue jusqu'alors.
  - Valeur initiale de U : soit ∞, soit $c^T x$ pour un x admissible connu.

Branch & Bound

Algorithme général (suite):

- Une étape typique est :

1. Sélectionner un sous-problème actif F_i
2. Si F_i est non admissible, le supprimer. Sinon, calculer $b(F_i)$.
3. Si $b(F_i) \geq U$, supprimer F_i.
4. Si $b(F_i) < U$, soit résoudre F_i directement, soit créer de nouveaux sous-problèmes et les ajouter à la liste des sous-problèmes actifs.

Branch & Bound

- Soit le problème F en forme canonique

$$\min x_1 - 2x_2$$

s.c. $-4x_1 + 6x_2 \leq 9$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

x_1, x_2 entiers

Branch & Bound

- $b(F_i)$ sera le coût optimal de la relaxation linéaire.
- Si la solution de la relaxation est entière, pas besoin de partitionner le sous-problème.
- Sinon, on choisit un x^*_i non entier, et on crée deux sous-problèmes en ajoutant les contraintes :

$$x_i \leq \lfloor x^*_i \rfloor \quad \text{et} \quad x_i \geq \lceil x^*_i \rceil$$

- Ces contraintes sont violées par x^*.

Branch & Bound

- $U = +\infty$
- Liste des sous-problèmes actifs : {F}
- Solution de la relax. de F : $x^* = (1.5, 2.5)$
- $b(F) = -3.5$
- Création des sous-problèmes en rajoutant les contraintes

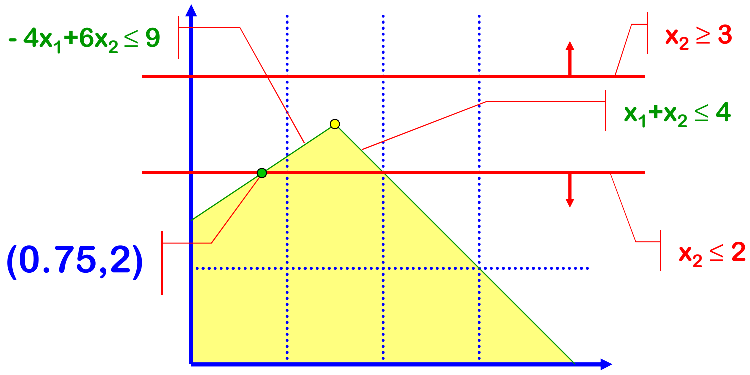
$$x_2 \leq \lfloor x^*_2 \rfloor = 2$$
$$x_2 \geq \lceil x^*_2 \rceil = 3$$

Branch & Bound

	F_1		F_2
	$\min x_1 - 2x_2$		$\min x_1 - 2x_2$
s.c.	$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$	s.c.	$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
	$x_1 + x_2 \leq 4$		$x_1 + x_2 \leq 4$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
	$x_2 \geq 3$		$x_2 \leq 2$
	x_1, x_2 entiers		x_1, x_2 entiers

Liste des sous-problèmes actifs : $\{F, F_1, F_2\}$

Branch & Bound



- F_1 non admissible[1]
- Liste des sous-problèmes actifs : $\{F,F_2\}$

Branch & Bound

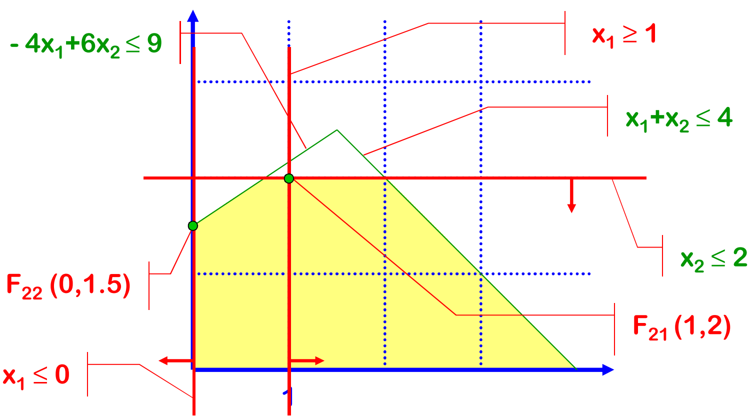
- $U = +\infty$
- Liste des sous-problèmes actifs : $\{F,F_2\}$
- Solution de la relax. de F_2 : $x^* = (0.75,2)$
- $b(F_2) = -3.25$
- Création des sous-problèmes en rajoutant les contraintes

$$x_1 \leq \lfloor x^*_1 \rfloor = 0$$
$$x_1 \geq \lceil x^*_1 \rceil = 1$$

Branch & bound

F_{21}		F_{22}	
	$\min x_1 - 2x_2$		$\min x_1 - 2x_2$
s.c.	$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$	s.c.	$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$
	$x_1 + x_2 \leq 4$		$x_1 + x_2 \leq 4$
	$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$
	$x_2 \leq 2$		$x_2 \leq 2$
	$x_1 \geq 1$		$x_1 \leq 0$
	x_1, x_2 entiers		x_1, x_2 entiers

Branch & Bound



- Liste des sous-problèmes actifs : $\{F, F_2, F_{21}, F_{22}\}$

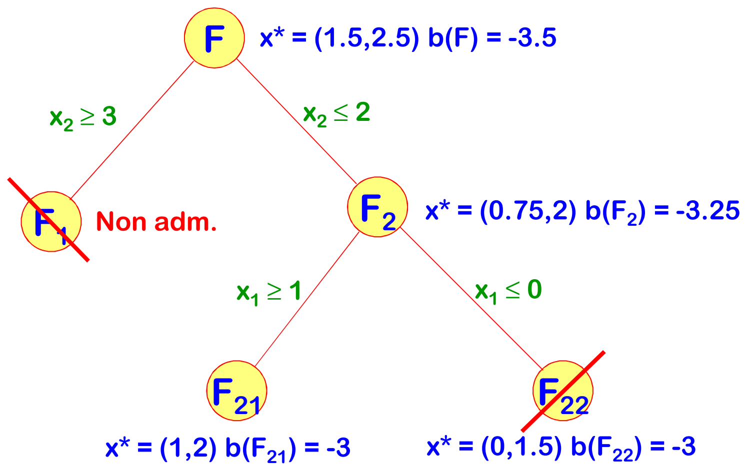
Branch & Bound

- U = +∞
- Liste des sous-problèmes actifs : {F,F_2, F_{21}, F_{22}}
- Solution de la relax. de F_{21} : x^* = (1,2)
- (1,2) est solution de F_{21}
- $b(F_{21}) = -3$
- U = -3

Branch & Bound

- U = -3
- Liste des sous-problèmes actifs : {F, F_2, F_{22}}
- Solution de la relax. de F_{22} : x^* = (0,1.5)
- $b(F_{22}) = -3 \geq U$
- Liste des sous-problèmes actifs : {F, F_2}
- Solution de F_2 = (1,2)
- Solution de F = (1,2).

Branch & Bound



Branch & Bound

Problème binaire du sac à dos

- Deux simplifications

1. Les variables sont binaires.
2. La relaxation linéaire peut être résolue efficacement par un algorithme glouton: prendre d'abord les articles à meilleur rendement, jusqu'à atteindre la capacité.

Branch & Bound

- Une société dispose de 1 400 000 F à investir.
- Les experts proposent 4 investissements possibles

	Coût	Bénéfice	Rendement
Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
Inv. 4	300 000	800 000	2.67

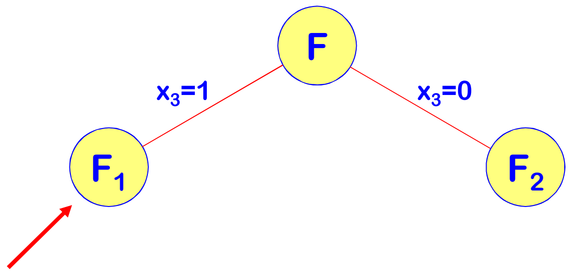
Branch & Bound

- Relaxation de F (U=-∞) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
0.5	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F : $x^*=(1,1,0.5,0)$**
- **$b(F) = 4\,400\,000 > U$** (! On maximise)
- **$F_1 : x_3 = 1$ $F_2 : x_3 = 0$**

Branch & Bound



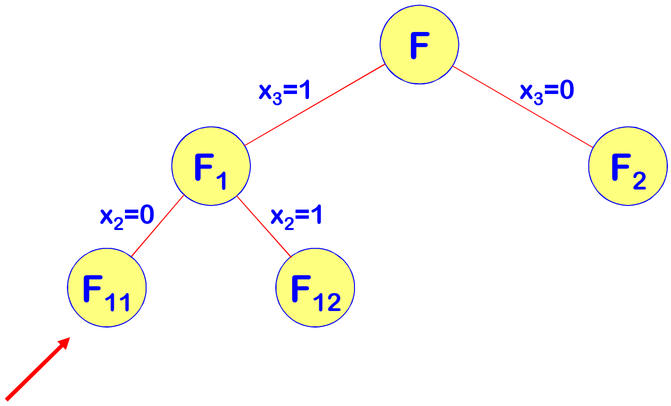
Branch & Bound

- Relaxation de F_1 ($U=-\infty$) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
5/7	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
1	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
0	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_1 : $x^*=(1,5/7,1,0)$**
- **$b(F_1) = 4\ 371\ 429 > U$**
- **$F_{11} : x_2 = 0$ $F_{12} : x_2 = 1$**

Branch & Bound



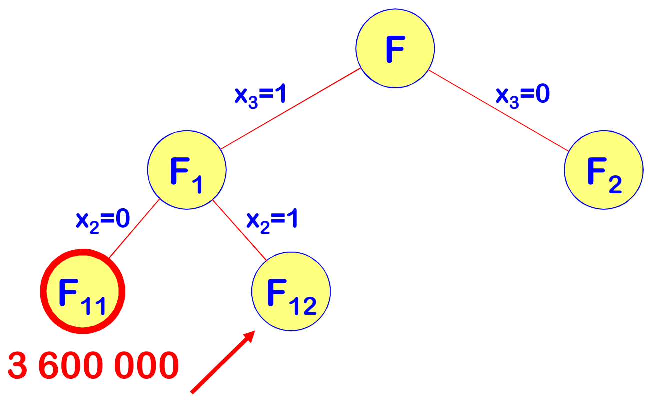
Branch & Bound

- Relaxation de F_{11} ($U=-\infty$) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
0	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
1	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
1	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_{11} : $x^*=(1,0,1,1)$**
- **$b(F_{11})$ = 3 600 000 > U**
- **U = 3 600 000**

Branch & Bound



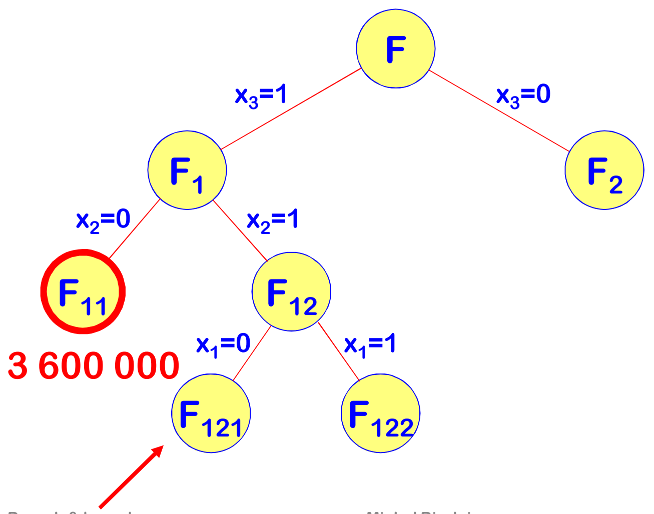
Branch & Bound

- Relaxation de F_{12} (U_{11}=3 600 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
3/5	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
1	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
0	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

  - **Relaxation de F_{12} : $x^*=(3/5,1,1,0)$**
  - **$b(F_{12})$ = 4 360 000 > U**
  - **F_{121} : $x_1 = 0$ F_{122} : $x_1 = 1$**

Branch & Bound



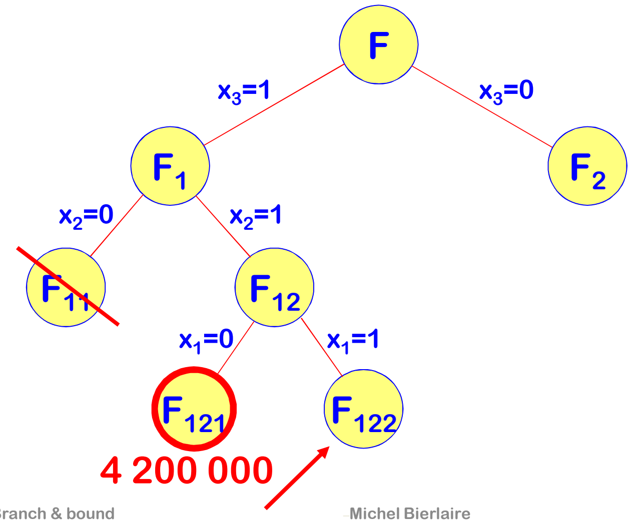
Branch & Bound

- Relaxation de F_{121} (U_{11}=3 600 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
0	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
1	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
1	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_{121} : x*=(0,1,1,1)**
- **$b(F_{121})$ = 4 200 000 > U**
- **U = 4 200 000**

Branch & Bound



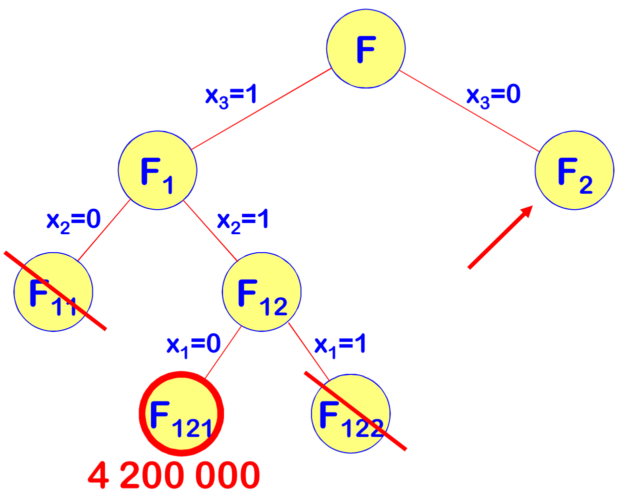
Branch & Bound

- Relaxation de F_{122} (U_{121}=4 200 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
1	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
?	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

  - **Relaxation de F_{122} : non admissible**
  - **Supprimer F_{122}**

Branch & Bound



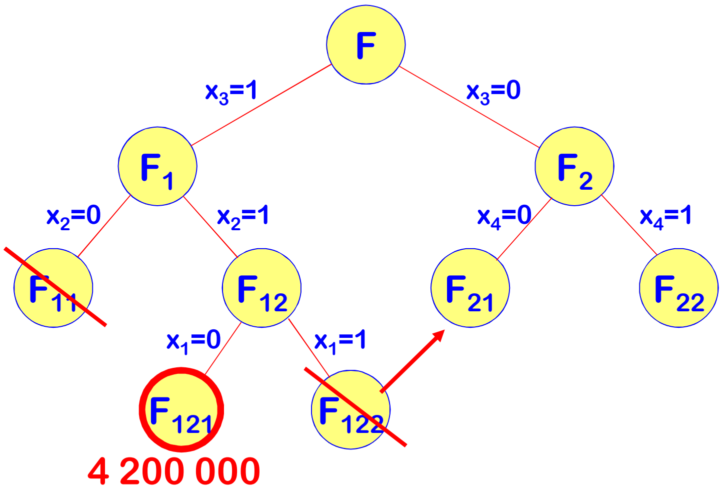
Branch & Bound

- Relaxation de F_2 (U_{121}=4 200 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
0	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
2/3	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_2 : $x^*=(1,1,0,2/3)$**
- **$b(F_2)$ = 4 333 333 > U**
- **F_{21} : x_4 = 0 F_{22} : x_4 = 1**

Branch & Bound



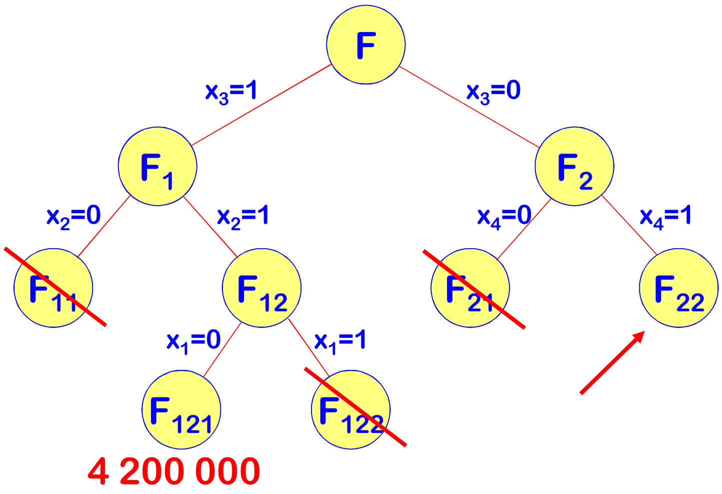
Branch & Bound

- Relaxation de F_{21} (U_{121}=4 200 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
<u>0</u>	Inv. 3	<u>400 000</u>	1 200 000	3.00
<u>0</u>	Inv. 4	<u>300 000</u>	800 000	2.67

- **Relaxation de F_{21} : $x^*=(1,1,0,0)$**
- **$b(F_{21})$ = 3 800 000 $\leq$ U**
- **Supprimer F_{21}**

Branch & Bound



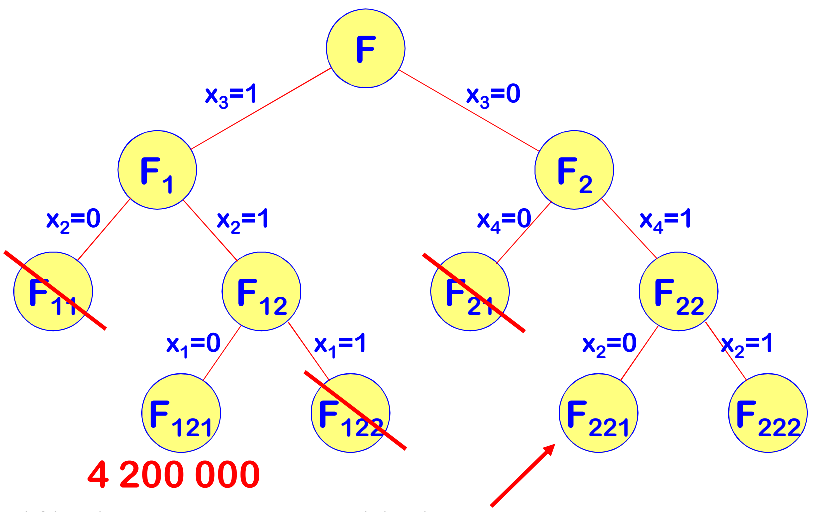
Branch & Bound

- Relaxation de F_{22} (U_{121}=4 200 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
6/7	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
0	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
1	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_{22} : x^*=(1,6/7,0,1)**
- **$b(F_{22})$ = 4 285 714 > U**
- **F_{221} : $x_2 = 0$ F_{222} : $x_2 = 1$**

Branch & Bound



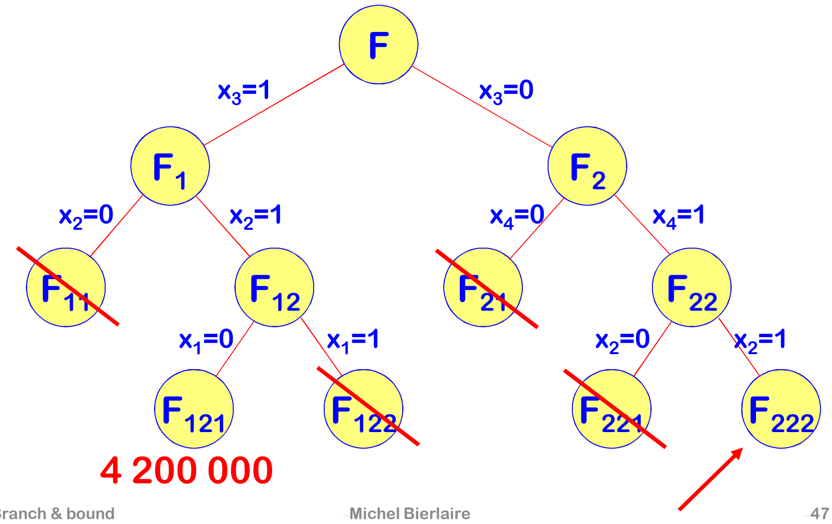
Branch & Bound

- Relaxation de F_{221} (U_{121}=4 200 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
1	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
0	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
0	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
1	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_{221} : $x^*=(1,0,0,1)$**
- **$b(F_{221})$ = 2 400 000 $\leq$ U**
- **Supprimer F_{221}**

Branch & Bound



Branch & Bound

- Relaxation de F_{222} (U_{121}=4 200 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
4/5	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
0	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
1	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_{222} : $x^*=(4/5,1,0,1)$**
- **$b(F_{222})$ = 4 280 000 > U**
- **F_{2221} : $x_1 = 0$ F_{2222} : $x_1 = 1$**

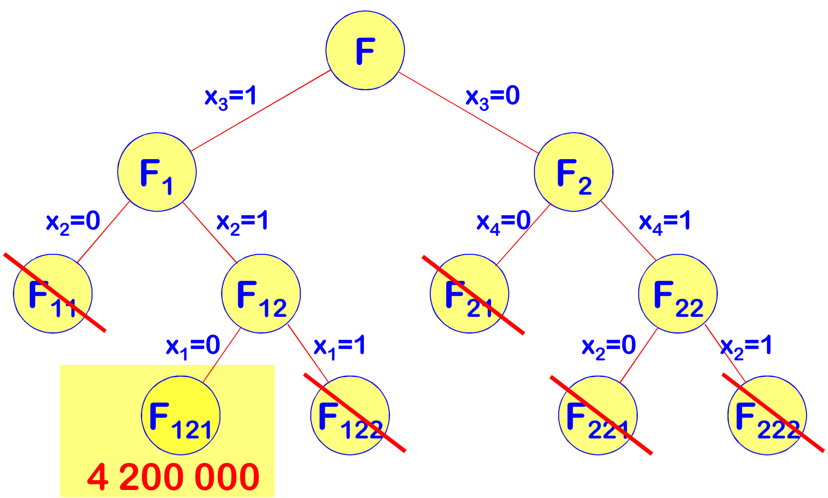
Branch & Bound

- Relaxation de F_{222} (U_{121}=4 200 000) :

		Coût	Bénéfice	Rendement
?	Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
1	Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
0	Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
1	Inv. 4	300 000	800 000	2.67

- **Relaxation de F_{2221} : $x^*=(0,1,0,1)$**
- **$b(F_{2221})$ = 3 000 000 $\leq$ U**
- **F_{2222} non admissible**

Branch & Bound



Branch & Bound

Notes :

- Seuls 7 combinaisons ont été considérées (F_{11},F_{121},F_{122},F_{21},F_{221},F_{2221},F_{2222})
- Une énumération complète aurait considéré 2^4=16 combinaisons