Optimisation en nombres entiers

Recherche Opérationnelle

GC-SIE

Motivation et exemples

Optimisation en nombres entiers

Définitions :

- Un programme en nombres entiers est un programme dont les variables sont contraintes à ne prendre que des valeurs entières.
- Souvent, elles sont contraintes à prendre les valeurs 0 ou 1. On parle alors d'un programme binaire.

Optimisation en nombres entiers

Définitions :

- Un programme mixte en nombres entiers est un programme dont certaines variables sont contraintes à ne prendre que des valeurs entières.

Optimisation en nombres entiers

Dans ce cours, on ne considérera que des programmes linéaires en nombres entiers.

Approche intuitive immédiate :

- On ignore les contraintes d'intégralité.
- On arrondi la solution.

En général, cela ne marche pas !

Exemple

$$\max 3 x_1 + 13 x_2$$

sc.

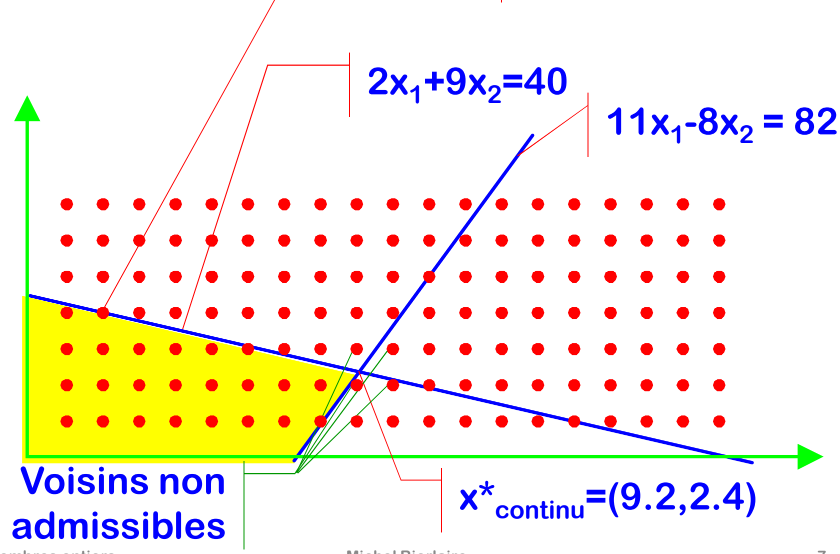
$$2 x_1 + 9 x_2 \leq 40$$

$$11 x_1 - 8 x_2 \leq 82$$

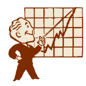
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ entiers}$$

Exemple



Exemple : investissement



- Une société dispose de 1 400 000 F à investir.
- Les experts proposent 4 investissements possibles

	Coût	Bénéfice	Rendement
Inv. 1	500 000	1 600 000	3.20
Inv. 2	700 000	2 200 000	3.14
Inv. 3	400 000	1 200 000	3.00
Inv. 4	300 000	800 000	2.67

Exemple : investissement

Modélisation :

- Variables de décision : x_i, i=1,…,4
- $x_i = 1$ si investissement i est choisi
- $x_i = 0$ sinon
- Objectif : maximiser bénéfice

$$\max 16\, x_1 + 22\, x_2 + 12\, x_3 + 8\, x_4$$

- Contrainte : budget d'investissement

$$5\, x_1 + 7\, x_2 + 4\, x_3 + 3\, x_4 \leq 14$$

Exemple : investissement

Programme linéaire 1

$$\max 16\, x_1 + 22\, x_2 + 12\, x_3 + 8\, x_4$$

- s.c.

$$5\, x_1 + 7\, x_2 + 4\, x_3 + 3\, x_4 \leq 14$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Solution :

$$x_1 = 2.8,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

Exemple : investissement

- $x_1 = 2.8, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$
- Problème : comment interpréter cette solution ?
- Effectuer l'investissement 1.
- Bénéfice : 1 600 000 F.
- Coût : 500 000 F

Exemple : investissement

Programme linéaire 2

$$\max 16 x_1 + 22 x_2 + 12 x_3 + 8 x_4$$

- s.c.

$$5 x_1 + 7 x_2 + 4 x_3 + 3 x_4 \leq 14$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$$

- Solution :

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0$$

Exemple : investissement

- $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0$
- Problème : comment interpréter cette solution ?
- Effectuer les investissements 1 et 2.
- Bénéfice : 3 800 000 F.
- Coût : 1 200 000 F.
- Plus assez de budget pour l'investissement 3.

Exemple : investissement

Programme en nombres entiers

$$\max 16 x_1 + 22 x_2 + 12 x_3 + 8 x_4$$

- s.c.

$$5 x_1 + 7 x_2 + 4 x_3 + 3 x_4 \leq 14$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$$

- Solution :

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

Exemple : investissement

- $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$
- Solution évidente à interpréter
- Bénéfice : 4 200 000 F.
- Coût : 1 400 000 F.

Exemple : investissement

Notes :

- Les contraintes d'intégralité peuvent modifier significativement la structure de la solution.
- L'intuition acquise avec les variables continues n'est pas directement utilisable.
- Dans l'exemple, l'investissement 1 est le plus rentable, mais il n'est pas repris dans la solution optimale.

Exemple : le sac à dos

- Jo le campeur part en randonnée dans la montagne.
- Il ne peut emporter dans son sac à dos qu'un poids limité à P.
- Chaque article i qu'il peut potentiellement emporter pèse p_i et lui procure une utilité u_i pour sa randonnée.
- Question : quels articles emporter pour maximiser son utilité sans dépasser la limite de poids ?

Problème du sac à dos

Variables de décision

- $x_i = 1$ si Jo emporte l'article i
- $x_i = 0$ sinon

$$\max u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_nx_n$$

- s.c.

$$p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n \leq P$$

$$x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\}$$

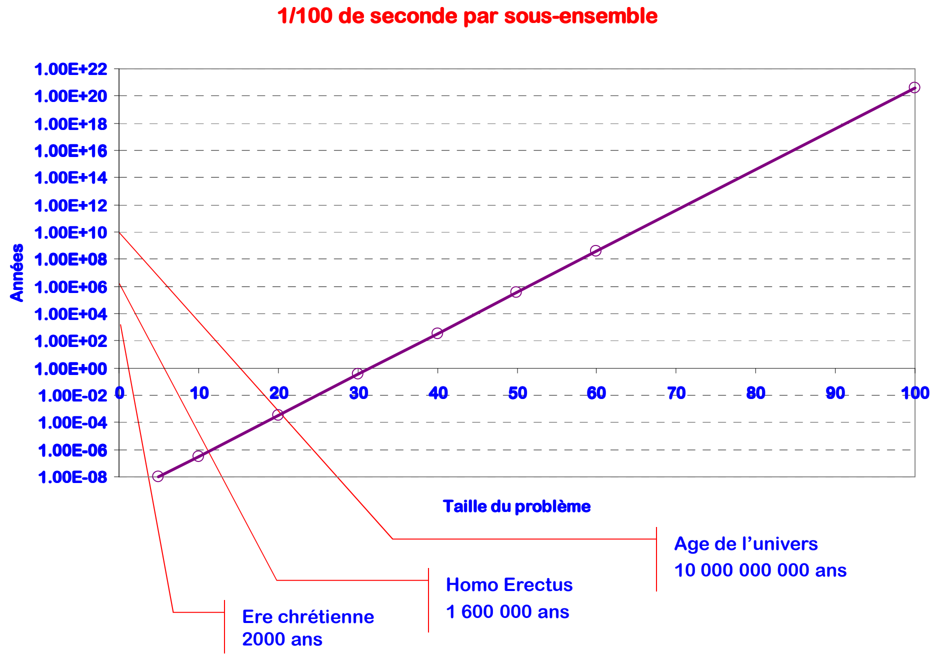
Problème du sac à dos

Notes :

- En général, les problèmes de cette forme portent le nom générique de problème de sac à dos.
- Le problème d'investissement est un problème de sac à dos.
- Le nombre de manières de choisir un sous-ensemble de n éléments est 2^n.

Problème du sac à dos

- Si l'on suppose qu'il faut 1/100 de seconde pour considérer un sous-ensemble, alors il faut
- plus d'une année pour 32 éléments
- plus de 100 ans pour 39 éléments
- plus de 1000 ans pour 42 éléments
- plus de 10 000 ans pour 45 éléments
- plus de 100 000 ans pour 49 éléments
- plus de 1 000 000 ans pour 52 éléments



Problème du sac à dos

- Il est impossible de considérer toutes les possibilités.
- Un algorithme efficace devrait obtenir la solution optimale en examinant un très petit nombre de solutions.

Modélisation

- Reprenons le problème d'investissement
- La société se voit imposer des contraintes supplémentaires.

a) Elle peut opérer au maximum deux investissements

Contrainte :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

Modélisation

b) Si elle décide d'opérer l'invest. 2, elle doit aussi opérer l'invest. 1.

Contrainte :

$$x_2 \leq x_1$$

ou

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

- Si $x_2 = 1$, alors $x_1 \geq 1$.Comme $x_1 \in \{0,1\}$, alors $x_1 = 1$.
- Si $x_2 = 0$, alors $x_1 \geq 0$. Pas de restriction sur x_1.

Modélisation

c) Si elle décide d'opérer l'invest. 2, elle ne peut pas opérer l'invest. 4.

Contrainte :

$$x_2 + x_4 \leq 1$$

- Si $x_2 = 1$, alors $x_4 \leq 0$.Comme $x_4 \in \{0,1\}$, alors $x_4 = 0$.
- Si $x_2 = 0$, alors $x_4 \leq 1$. Pas de restriction sur x_4.

Modélisation : set-covering

- Problème : localisation de stations d'incendie dans six villes.
- Objectif : en installer le moins possible.
- Contrainte : pouvoir atteindre chaque ville en au moins 15 minutes à partir d'au moins une station.

Modélisation : set-covering

- Table des temps de trajet :

	1	2	3	4	5	6
1		10	20	30	30	20
2	10		25	35	20	10
3	20	25		15	30	20
4	30	35	15		15	25
5	30	20	30	15		14
6	20	10	20	25	14	

Modélisation : set-covering

Variables de décision :

- $x_i = 1$ si on installe une station dans la ville i (i=1,…6)
- $x_i = 0$ sinon

Objectif :

$$\min x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

Modélisation : set-covering

Contraintes :

- La ville 1 peut être atteinte en au moins 15 minutes à partir de la ville 1 et de la ville 2.
- Pour assurer le service de la ville 1, il faut donc une station soit en 1 soit en 2.

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

Modélisation : set-covering

Contraintes :

- La ville 2 peut être atteinte en au moins 15 minutes à partir de la ville 1, de la ville 2 et de la ville 6.
- Pour assurer le service de la ville 2, il faut donc une station soit en 1, soit en 2, soit en 6.

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$$

Modélisation : set-covering

Programme :

$$\min x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$$
$$x_3+x_4 \geq 1$$
$$x_3+x_4+x_5 \geq 1$$
$$x_4+x_5+x_6 \geq 1$$
$$x_2+x_5+x_6 \geq 1$$

Modélisation : soit-soit

- Considérons deux contraintes :

$$f(x_1,\ldots,x_n) \leq 0$$
$$g(x_1,\ldots,x_n) \leq 0$$

- On veut garantir qu'au moins une des ces contraintes soit vérifiée, mais pas nécessairement les deux.
- Pour cela, il faut
  - Déterminer M tel que

$$f(x_1,\ldots,x_n) \leq M \text{ et } g(x_1,\ldots,x_n) \leq M \ \forall x$$

  - Introduire une variable binaire $y \in \{0,1\}$

Modélisation : soit-soit

- Utilisons les contraintes suivantes :

$$f(x_1,\ldots,x_n) \leq My$$
$$g(x_1,\ldots,x_n) \leq M(1-y)$$

- Si y = 1, alors les contraintes sont

$$f(x_1,\ldots,x_n) \leq M$$
$$g(x_1,\ldots,x_n) \leq 0$$

- Si y = 0, alors les contraintes sont

$$f(x_1,\ldots,x_n) \leq 0$$
$$g(x_1,\ldots,x_n) \leq M$$