ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation dans les réseaux

GC-SIE

Graphes et flots

Graphes

- Un graphe orienté $\mathcal{G}$ =($\mathcal{N}$,$\mathcal{A}$) consiste en un ensemble de N nœuds $\mathcal{N}$ et un ensemble de A arcs $\mathcal{A}$.
- On supposera
  - $1 \leq N < \infty$ et $0 \leq A < \infty$
  - il existe un seul arc reliant deux nœuds dans une même direction
- Un arc (i,j) sera considéré comme une paire ordonnée. (i,j) est donc différent de (j,i).

Définitions

- Si (i,j) est un arc, on dira que
  - (i,j) est un arc sortant de i
  - (i,j) est un arc entrant dans j
  - (i,j) est incident à i et à j
  - i est le prédécesseur de j
  - j est le successeur de i
- Le degré du nœud i est le nombre d'arcs qui lui sont incidents.
- Un graphe est complet s'il y a un arc entre chaque paire de nœuds.

Chemins

- Nous utiliserons principalement des graphes orientés, et omettrons souvent l'adjectif *orienté*.
- Un chemin P est une suite de nœuds $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$, $k > 1$, et la suite correspondante de k-1 arcs tels que le $i^{\text{ième}}$ arc de la suite est soit
  - (n_i,n_{i+1}) : arc avançant
  - (n_{i+1},n_i) : arc reculant
- n_1 est l'origine du chemin
- n_k est la destination du chemin

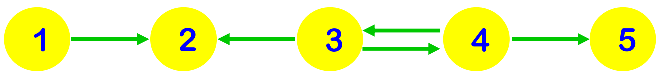
Chemins

- P^+ est l'ensemble des arcs avançant de P
- P^- est l'ensemble des arcs reculant de P
- Un cycle est un chemin dont l'origine est identique à la destination $n_1=n_k$
- Un chemin est simple lorsqu'il ne contient pas d'arcs ni de nœuds répétés, exceptés éventuellement n_1 et n_k
- Un chemin est avançant si tous ses arcs le sont.
- Un chemin est reculant si tous ses arcs le sont.

Chemins

- Un cycle Hamiltonien est un cycle simple avançant contenant tous les nœuds du graphe.

Attention : la suite de nœuds n'est pas toujours suffisante pour décrire le chemin.



Nœuds (1,2,3,4,5) Arcs ((1,2),(3,2),(3,4),(4,5))

Flots

- Notation : x_{ij} = flot sur arc (i,j) $\in$ IR
- Si $x_{ij} < 0$, le flot est orienté dans le sens contraire à l'arc.
- L'ensemble $\{x_{ij}$ t.q. $(i,j) \in \mathcal{A}\}$ est appelé vecteur de flots
- A chaque vecteur de flots x est associé un vecteur de divergence $y \in IR^N$

Flots

- Pour tout $i \in \mathcal{N}$,

$$y_i = \sum_{j|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji}$$

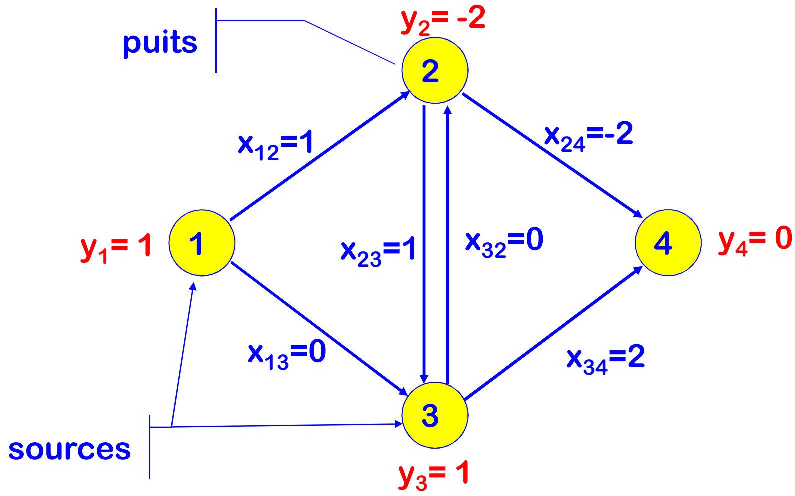
y_i = flot total sortant – flot total entrant

Flots

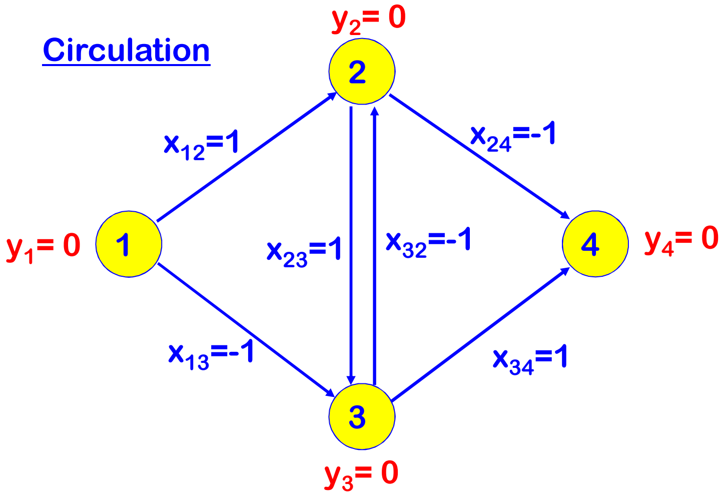
- Un nœud i est une source si $y_i > 0$
- Un nœud i est un puits si $y_i < 0$
- Un vecteur de flots x est une circulation si $y_i=0$ pour tout $i \in \mathcal{N}$
- On a toujours

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} y_i = 0$$

Flots


puits
sources
y2= -2
y1= 1
y3= 1
y4= 0
1
2
3
4
x12=1
x24=-2
x23=1
x32=0
x13=0
x34=2

Flots


Circulation
y2= 0
y1= 0
y3= 0
y4= 0
1
2
3
4
x12=1
x24=-1
x23=1
x32=-1
x13=-1
x34=1

Flots

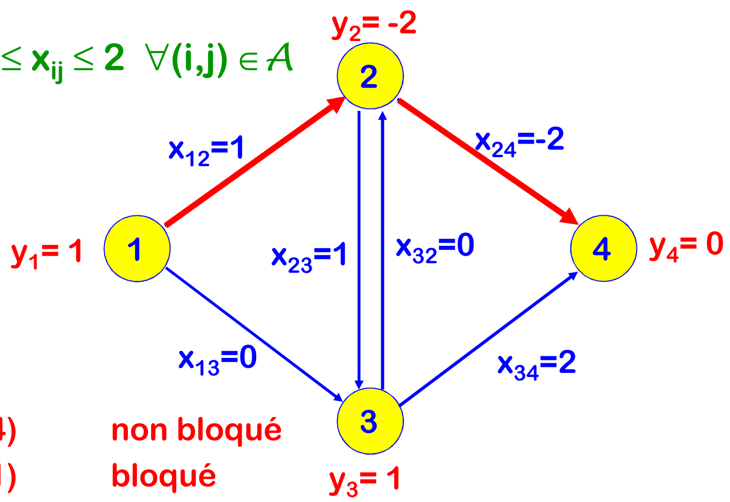
- Contraintes de borne

$$b_{ij} \le x_{ij} \le c_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

- Un chemin P est non bloqué par rapport à x si
  - $x_{ij} < c_{ij} \quad \forall (i,j) \in P^+$
  - $x_{ij} > b_{ij} \quad \forall (i,j) \in P^-$
- Idée : on ne peut plus envoyer de flot sur un chemin bloqué sans violer une contrainte.

Flots

$$-2 \le x_{ij} \le 2 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$



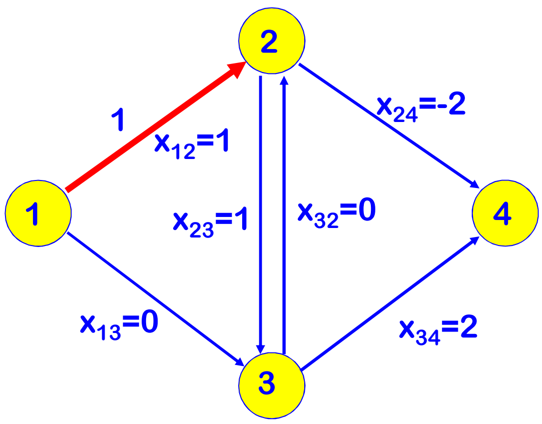
(1,2,4) non bloqué
(4,2,1) bloqué

Flots et chemins

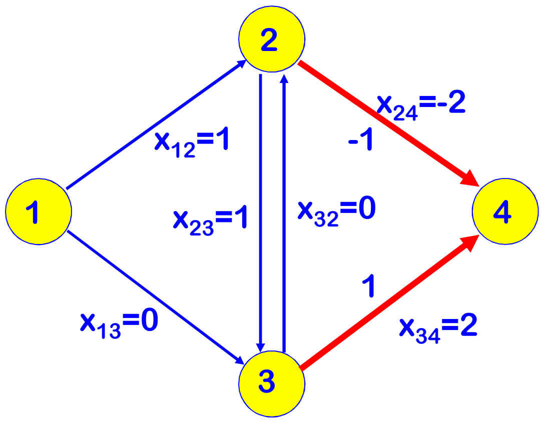
- Un flot de chemin simple est un vecteur de flot qui correspond à l'envoi d'une quantité positive *a* de flot le long d'un chemin simple.

$$x_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } (i,j) \in P^+ \\ -a & \text{si } (i,j) \in P^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Flots et chemins

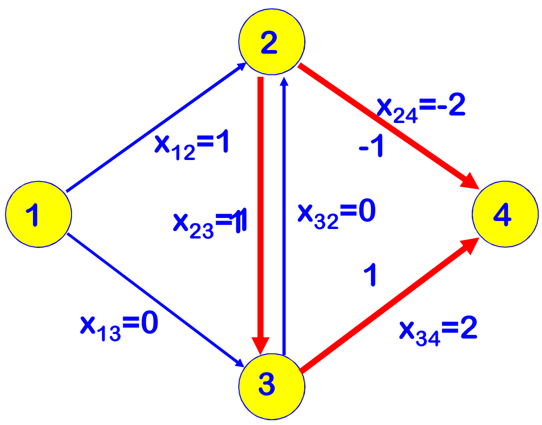


Flots et chemins



Graphes et flots Michel Bierlaire 17

Flots et chemins

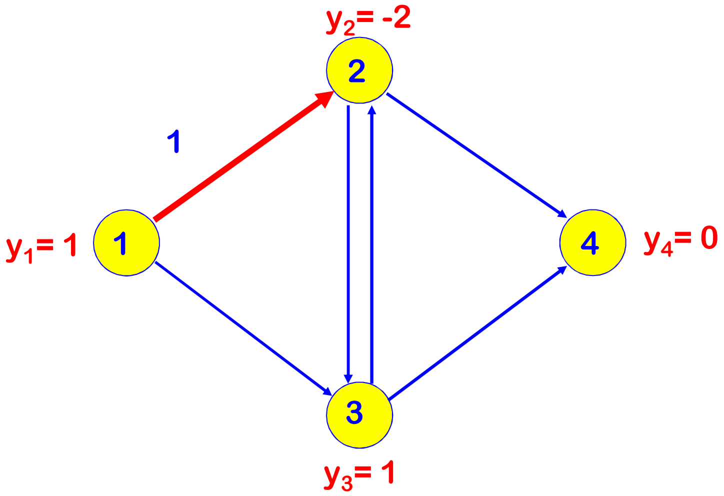


Graphes et flots Michel Bierlaire 18

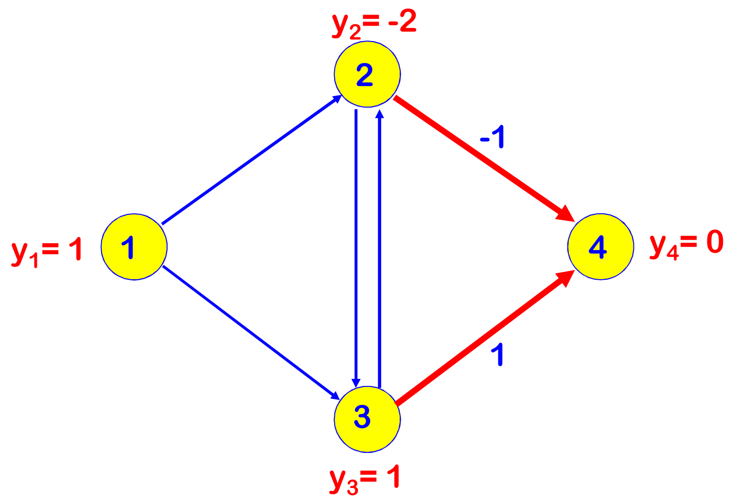
Flots et chemins

- On aimerait décomposer un vecteur de flots en la somme de flots de chemins simples.
- Un chemin P est conforme à un vecteur de flots x si
  - $x_{ij} > 0 \ \forall(i,j) \in P^+$
  - $x_{ij} < 0 \ \forall(i,j) \in P^-$
  - P est un cycle ou P relie une source à un puits.
- Un flot de chemin simple x^s est conforme à x si le chemin correspondant l'est.

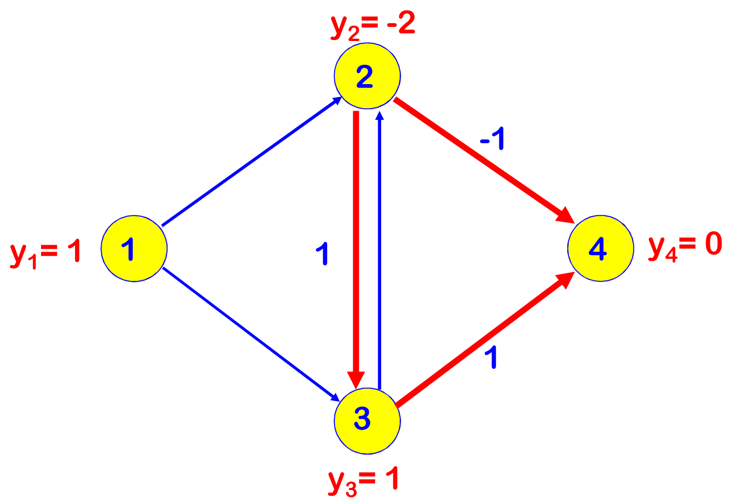
Flots et chemins



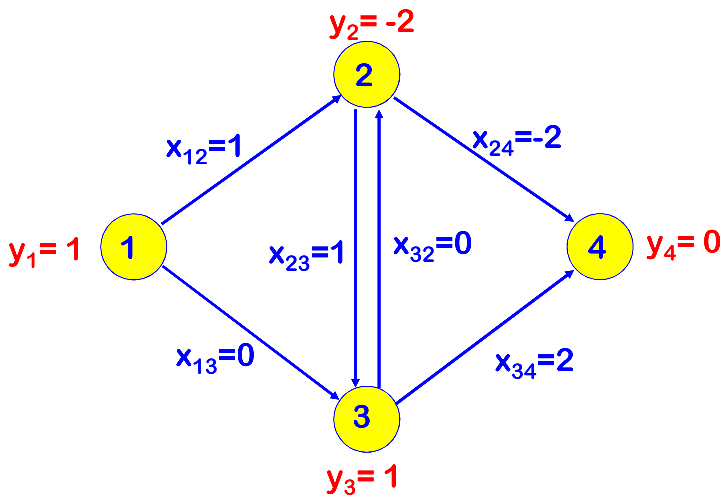
Flots et chemins



Flots et chemins



Flots et chemins



Flots et chemins

Théorème de décomposition conforme :

- Un vecteur de flots non nul peut être décomposé en la somme de t vecteurs de flots de chemin simple x^1, x^2,..., x^t, tous conformes à x.
- Si x est entier, on peut choisir x^1, x^2,..., x^t entiers également
- Si x est une circulation, on peut choisir x^1, x^2,..., x^t flots de cycle simple

Le problème de transbordement

Énoncé

- Une entreprise doit transporter ses produits de ses usines (lieux de production) vers ses clients.
- Elle désire minimiser ses coûts.
- Elle doit se plier aux contraintes de capacité du système de transport.
- Elle peut éventuellement transborder les marchandises en tout nœud du réseau.

Énoncé

- Trouver un vecteur de flots
  - qui minimise une fonction de coût (linéaire),
  - qui produise un vecteur de divergence donné,
  - qui vérifie les contraintes de capacité.

Énoncé

Données :

- coefficients de coût : a_{ij}
- capacités inférieures : b_{ij}
- capacités supérieures : c_{ij}
- divergences : s_i
  - Si $s_i > 0$ alors s_i est l'offre en i, c-à-d ce qui est produit par l'usine située en i
  - Si $s_i < 0$ alors $-s_i$ est la demande en i, c-à-d ce qui est réclamé par le client situé en i.

Énoncé

$$\min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij}$$

sous contraintes

$$y_i = s_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

$$y_i = \sum_{j|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji}$$

Contraintes

$$y_i = s_i \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

contraintes d'offre/demande
contraintes de conservation des flots

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

contraintes de capacité

Problème du plus court chemin

- Le problème du plus court chemin consiste à déterminer le chemin de coût minimum reliant un nœud α à un nœud β.
- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- On envoie une unité de flot de α à β.

Problème du plus court chemin

Données :

- coefficients de coût : a_{ij}
- capacités inférieures : 0
- capacités supérieures : $+\infty$
- divergences :
  - $s_\alpha = 1$
  - $s_\beta = -1$
  - $s_i = 0$ si $i \neq \alpha$ et $i \neq \beta$

Problème d'affectation

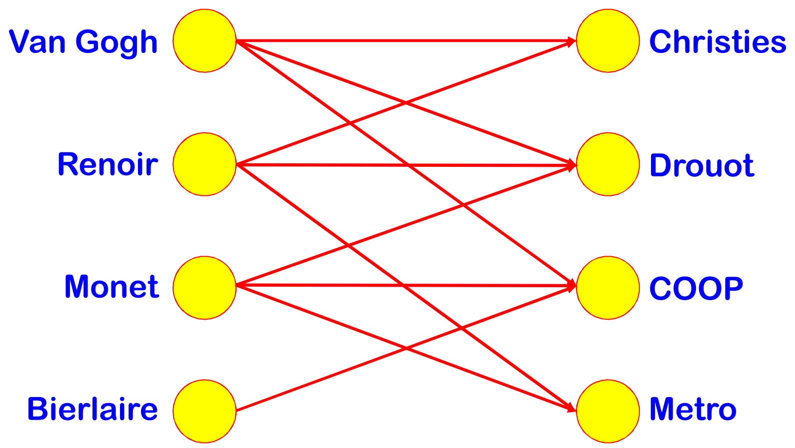
- Je possède 4 chefs-d'œuvre que je désire vendre.
- 4 acheteurs se présentent, et me font les propositions suivantes (en milliers de $)

	Van Gogh	Renoir	Monet	Bierlaire
Christie's	8000	11000	-	-
Drouot	9000	13000	12000	-
COOP	9000	-	11000	0.01
Metropolitan	-	14000	12000	-

Problème d'affectation

- Je désire vendre exactement une peinture à chaque acheteur.
- Quelle peinture dois-je vendre à quel acheteur pour gagner un maximum ?
- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Représentation en réseau.

Problème d’affectation



Problème d’affectation

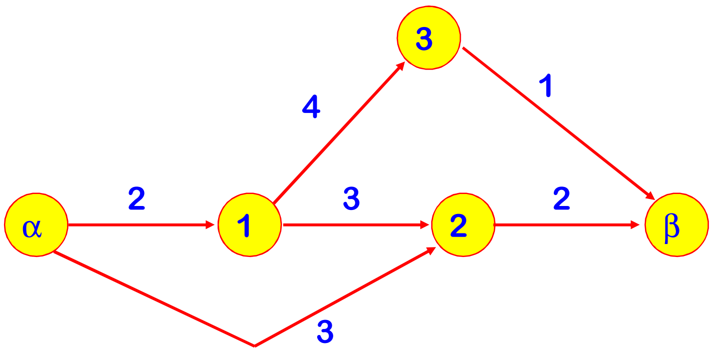
Données :

- coefficients de coût : $-a_{ij}$
- a_{ij} = prix proposé par acheteur j pour peinture i.
- capacités inférieures : 0
- capacités supérieures : 1
- divergences :
  - s_i = 1 si i représente une peinture (offre)
  - s_i = -1si i représente un acheteur (demande)

Problème de flot maximal

- Une société pétrolière désire envoyer un maximum de pétrole via un réseau de pipelines entre un lieu α et un lieu β.
- Combien de litres par heure pourra-t-elle faire passer par le réseau ?
- Les capacités des pipelines (en kilolitres/heure) sont indiquées sur les arcs.

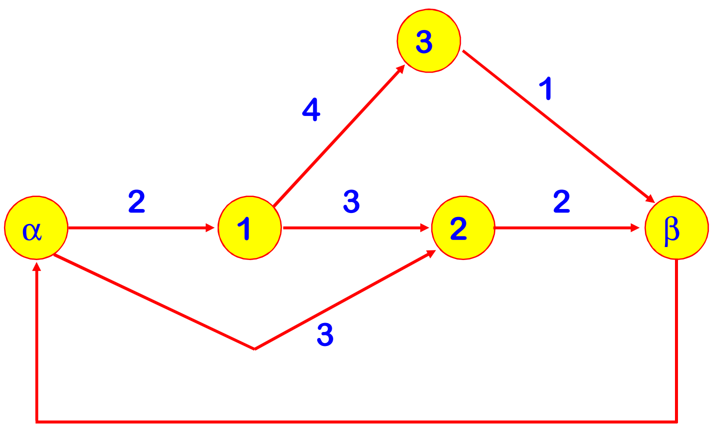
Problème de flot maximal



Problème de flot maximal

- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Il faut ajouter un arc artificiel.
- Idée : chaque unité de flot qui a réussi à passer à travers le réseau est ramenée artificiellement à α, en rapportant des bénéfices (coût négatif).

Problème de flot maximal



Problème de flot maximal

Données :

- coefficients de coût :
  - 0 pour les arcs « réels »
  - -1 pour l'arc artificiel
- capacités inférieures : b_{ij} (souvent 0)
- capacités supérieures : c_{ij}
- divergences :
  - $s_i = 0$ pour tout i
  - on désire une circulation

Problème de transport

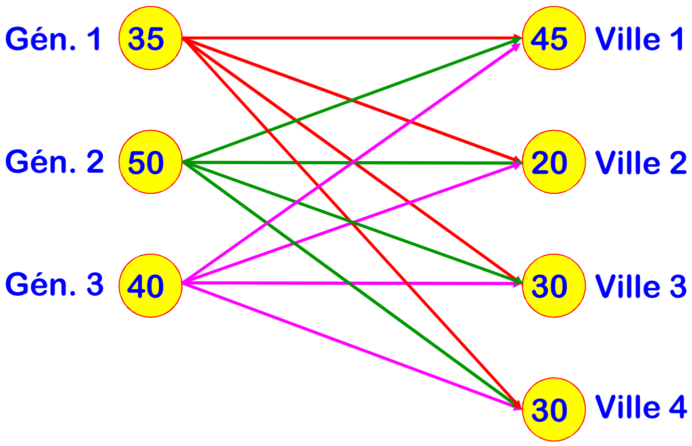
- Une société électrique possède trois générateurs pour fournir 4 villes en électricité.
- Les générateurs produisent resp. 35, 50 et 40 MKWh.
- Les villes consomment resp. 45, 20, 30 et 30 MKWh.
- Les coûts de transport d'un MKWh d'un générateur à une ville sont repris dans le tableau suivant.

Problème de transport

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Gén. 1	8	6	10	9
Gén. 2	9	12	13	7
Gén. 3	14	9	16	5

- Comment approvisionner les villes à moindre coût ?
- Représentation en réseau.

Problème de transport



Problème de transport

Données :

- coefficients de coût : a_{ij}
- a_{ij} = prix entre gén. i et ville j
- capacités inférieures : 0
- capacités supérieures : $+\infty$
- divergences :
  - s_i = capacité de production si i = générateur
  - s_i = -demande si i = ville