ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation linéaire

Recherche opérationnelle

GC-SIE

Algorithme du simplexe
Phase I

Introduction

- Algorithme du simplexe :
  - Soit x_0 une solution de base admissible
- Comment déterminer x_0 ?
- Comment déterminer le tableau initial ?
- C'est le rôle de la Phase I.
- Cas simple :
  - problème en forme canonique tel que $b \geq 0$.
- Cas difficile :
  - problème général en forme standard.

Forme canonique

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.c.}\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec $b \geq 0$ (hypothèse non générale).
On introduit les variables d'écart y.
On obtient un problème en forme standard.

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.c.}\ & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Forme canonique

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.c.}\ & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

- Solution de base admissible :
  - x = 0
  - y = b
  - Matrice de base : B = I

Forme canonique

- Forme canonique :

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min\ z = & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & \\ \text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Forme standard :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl} \min\ z = & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & & & & & & & \\ \text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 20 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 20 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 20 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Forme canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

B(1)=4, B(2)=5, B(3)=6

$$c = \begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B=B^{-1}=I$

$c_B=0$

Forme canonique

Tableau initial :

$B^{-1}A=A$

$B^{-1}b=b$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$c^T - c^T_B B^{-1}A = c^T$

$-c^T_B B^{-1} b = 0$

Forme standard

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- On peut supposer, sans perte de généralité, que b ≥ 0.
- Si $b_i < 0$, on remplace la contrainte

$$a_i^T x_i = b_i$$

- par

$$-a_i^T x_i = -b_i$$

Forme standard

Idée :

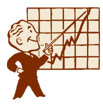
- On résoud un problème auxiliaire tel que :
  - il soit lié au problème initial,
  - il soit trivial d'identifier une solution de base admissible pour ce problème auxiliaire.
- Pour cela, on introduit une variable auxiliaire par contrainte, et on remplace la fonction de coût.

Forme standard

$$\begin{aligned} \min \; & y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ \text{s.c.} \quad Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solution de base admissible :
  - x = 0
  - y = b
  - Matrice de base : B = I

Forme standard



- Appelons P1 le problème original

$$\begin{aligned} \min \; & c^T x \\ \text{s.c.} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

- et P2 le problème auxiliaire

$$\begin{aligned} \min \; & y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ \text{s.c.} \quad Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme standard

- Le coût optimal de P2 ne peut être négatif.
- Supposons que x_0 soit une solution admissible de P1.
- Dans ce cas, $Ax_0=b$ et $x_0 \geq 0$.
- $x=x_0$ et $y=0$ est une solution admissible de P2.
- Le coût associé est 0. C'est donc une solution optimale.

Forme standard

- Si P1 possède une solution admissible
- Alors le coût optimal de P2 est 0.

Contraposée :

- Si le coût optimal de P2 est strictement positif
- Alors P1 ne possède pas de solution admissible.

Forme standard

- Si (x^*,y^*) est solution optimale de P2.
- Si le coût optimal associé est 0.
- Alors
  - $y^*_1+y^*_2+\ldots+y^*_m = 0$
  - $y^*_1=y^*_2=\ldots=y^*_m = 0$
  - Donc $Ax^*=b$ et $x^*\geq 0$
  - x^* est solution admissible de P1.

Format standard

Tableau initial du problème auxiliaire :

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$	A	b
$c^T - c^T_B B^{-1}A$	$-c^T_B B^{-1}b$	$-c^T_B A \;¦\; 0$	$-c^T_B b$

–Somme des colonnes

$B^{-1} = I$

$c_B=(1,1,1,\ldots)$

Pour les variables originales i : $c_i=0$

Forme standard

- Problème initial P1:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 \\
 & & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & = & 5 \\
 & & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Problème auxiliaire P2 :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & + & x_8 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & & & & & & & = & 3 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & & & + & x_6 & & & & & = & 2 \\
 & & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & & & & & + & x_7 & & & = & 5 \\
 & & & & & 3x_3 & + & x_4 & & & & & & & + & x_8 & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & , & x_8 & \geq & 0
\end{array}
$$

Forme standard

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	2	3	0	1	0	0	0	3	
-1	2	6	0	0	1	0	0	2	
0	4	9	0	0	0	1	0	5	
0	0	3	1	0	0	0	1	1	θ=1
0	-8	-21	-1	0	0	0	0	-11	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	2	3	0	1	0	0	0	3	θ=1
-1	2	6	0	0	1	0	0	2	θ=1/3
0	4	9	0	0	0	1	0	5	θ=5/9
0	0	3	1	0	0	0	1	1	θ=1/3
0	-8	-18	0	0	0	0	1	-10	

Forme standard

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	2	3	0	1	0	0	0	3	θ=1
-1	2	6	0	0	1	0	0	2	θ=1/3
0	4	9	0	0	0	1	0	5	θ=5/9
0	0	3	1	0	0	0	1	1	θ=1/3
0	-8	-18	0	0	0	0	1	-10	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	2	0	-1	1	0	0	-1	2	θ=1
-1	2	0	-2	0	1	0	-2	0	θ=0
0	4	0	-3	0	0	1	-3	2	θ=1/2
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	
0	-8	0	6	0	0	0	7	-4	

Forme standard

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	2	0	-1	1	0	0	-1	2	θ=1
-1	2	0	-2	0	1	0	-2	0	θ=0
0	4	0	-3	0	0	1	-3	2	θ=1/2
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	
0	-8	0	6	0	0	0	7	-4	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
2	0	0	1	1	-1	0	1	2	θ=1
-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	-1	0	
2	0	0	1	0	-2	1	1	2	θ=1
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	
-4	0	0	-2	0	4	0	-1	-4	

Forme standard

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
2	0	0	1	1	-1	0	1	2	θ=1
-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	-1	0	
2	0	0	1	0	-2	1	1	2	θ=1
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3	
-4	0	0	-2	0	4	0	-1	-4	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	1
0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4	1/2
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3
0	0	0	0	2	2	0	1	0

Forme standard

- Solution optimale du problème auxiliaire P2:

  $x^T=(1 \ \ 1/2 \ \ 1/3 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0)$
- Coût optimal = 0
- Solution admissible du problème P1

  $x_0^T = (1 \ \ 1/2 \ \ 1/3 \ \ 0)$

Attention :

- Il reste une variable artificielle en base (x_7)

Forme standard

- Comment éliminer les variables artificielles hors de la base ?

Note :

- Si (x*,y*) est solution optimale à coût nul du problème auxiliaire
- Alors la variable artificielle en base est forcément nulle
- Donc la solution est dégénérée.

Forme standard

- Supposons que la $k^{ième}$ variable de base soit artificielle.
- Examinons la $k^{ième}$ ligne du tableau.
- Choisir l'élément en colonne j de cette ligne tel que
  - j soit l'indice d'une variable du problème original
  - l'élément soit non nul.
- k sort de base. j rentre en base
- Pivotage du tableau.

Forme standard

- Mais…
- Que se passe-t-il si aucun élément de la sorte n'existe ?

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	1
0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4	1/2
0	0	0	0	-1	-1	1	0	0
0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3
0	0	0	0	2	2	0	1	0

Forme standard

Cela signifie que

- la matrice A n'est pas de rang plein
- la ligne en question correspond à une contrainte redondante
- elle peut être supprimée.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\
\hline
 & & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 5
\end{array}
$$

Forme standard

- Une fois que le tableau optimal du problème auxilaire est obtenu,
- et que toutes les variables artificielles ont quitté la base,
- on obtient le tableau initial du problème P1 en
  - supprimant les colonnes relatives aux variables artificielles;
  - calculant les coûts réduits initiaux.

Exemple

P1

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
 & -x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

P2

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & & & & & & & & & & & x_6 & + & x_7 & + & x_8 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & & & = & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & + & x_7 & & & = & 2 \\
 & -x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & & & & & & + & x_8 & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & , & x_8 & \geq & 0
\end{array}
$$

P2 : tableau initial

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	θ=2
1	2	0	-3	1	0	1	0	2	θ=2
-1	-4	3	0	0	0	0	1	1	
-1	-1	-3	-1	-2	0	0	0	-5	

Dernière ligne = -somme des colonnes

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0	
0	-1	3	4	1	1	0	1	3	θ=1
0	2	-3	3	-1	1	0	0	-3	

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8		
1	3	0	4	1	1	0	0	2	
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0	
0	-1	3	4	1	1	0	1	3	θ=1
0	2	-3	3	-1	1	0	0	-3	

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
1	3	0	4	1	1	0	0	2
0	-1	0	-7	0	-1	1	0	0
0	-0.33	1	1.33	0.33	0.33	0	0.33	1
0	1	0	7	0	2	0	1	0

- Solution optimale de P2
- Coût nul
- Mais x7 est dans la base

P2 : tableau final

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	
1	0	0	-17	1	-2	3	0	2
0	1	0	7	0	1	-1	0	0
0	0	1	3.67	0.33	0.67	-0.33	0.33	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0

P1 : tableau initial

coûts	2	3	3	1	-2	
	x1	x2	x3	x4	x5	
	1	0	0	-17	1	2
	0	1	0	7	0	0
	0	0	1	3.67	0.33	1
	0	0	0	3	-5	-7

$c^T - c^T_B B^{-1} A$

$-c^T_B B^{-1} b$

P1 : tableau initial

x1	x2	x3	x4	x5		
1	0	0	-17	1	2	θ=2
0	1	0	7	0	0	
0	0	1	3.67	0.33	1	θ=3
0	0	0	3	-5	-7	

x1	x2	x3	x4	x5		
1	0	0	-17	1	2	
0	1	0	7	0	0	θ=0
-0.33	0	1	9.33	0	0.33	θ=0.4
5	0	0	-82	0	3	

x1	x2	x3	x4	x5	
1	2.43	0	0	1	2
0	0.14	0	1	0	0
-0.33	-1.33	1	0	0	0.33
5	11.71	0	0	0	3

P1 : tableau final

Algorithme du simplexe

- Nous avons maintenant un algorithme complet pour résoudre tout programme linéaire en forme standard

Phase I

1. En multipliant certaines contraintes par –1, modifier le problème pour que b ≥ 0.

Algorithme complet du simplexe

Phase I (suite)

2. Introduire les variables artificielles $y_1,\ldots,y_m$, et appliquer la méthode du simplexe au problème auxiliaire

$$\begin{array}{rrcl} \min & \sum_{i=1}^{m} y_i & & \\ \text{s.c.} & Ax + y & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Algorithme complet du simplexe

Phase I (suite)

3. Si le coût optimal est strictement positif, le problème original n'est pas admissible. STOP.
4. Si la $k^{ième}$ variable de base est une variable artificielle, examiner la ligne k du tableau. Choisir l'élément en colonne j de cette ligne tel que
   – j soit l'indice d'une variable du problème original
   – l'élément soit non nul.

   Pivoter le tableau autour de cet élément.

Algorithme complet du simplexe

Phase I (suite)

4. (suite) Si tous ces éléments sont nuls, la ligne correspond à une contrainte redondante et peut être supprimée.

   Répéter le point 4 jusqu'à ce qu'aucune des variables artificielles ne soient en base.

Algorithme complet du simplexe

Phase II

- Les variables artificielles et les colonnes correspondantes sont supprimées du tableau.
- La ligne des coûts est calculée.
- Appliquer la méthode du simplexe au tableau obtenu.

Algorithme complet du simplexe

Notes :

- Complet car il peut gérer toutes les issues possibles.
- Si le cyclage est empêché (par la règle de Bland), une des 4 possibilités suivantes se passera :
  - Le problème n’est pas admissible. Détecté à la fin de la phase I.
  - Le problème est admissible, mais A n’est pas de rang plein. Les contraintes redondantes sont éliminées lors de la phase I.

Algorithme complet du simplexe

– Le coût optimal est $-\infty$. Détecté lors de la phase II.

– La phase II se termine avec une solution optimale.

Méthode du grand M

Motivation :

- Combiner les deux phases en une seule en
  - utilisant les variables artificielles y
  - remplaçant la fonction objectif par

$$c^T x + M \sum_{i=1}^{m} y_i$$

où M est une constante positive très grande.

Méthode du grand M

- Si la méthode du simplexe se termine avec une solution (x*,y*) telle que y*=0, alors x* est une solution optimale du problème original.
- Si la méthode du simplexe se termine avec une solution (x*,y*) telle que y*≠0, alors le problème original est non admissible.

Méthode du grand M

- Si la méthode du simplexe identifie que le problème auxiliaire est non borné, le problème initial est non admissible ou non borné (ou les deux).
- En pratique, on n'est pas obligé de donner une valeur à M.
- Chaque fois que M est comparé à un nombre, il sera toujours considéré comme plus grand.

Exemple

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\min & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & Mx_4 & + & Mx_5 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 1 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

x1	x2	x3	x4	x5	
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	2
1-2M	2-M	1-M	0	0	-3M

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
$c^T - c^T_B B^{-1}A$	$-c^T_B B^{-1}b$

x1	x2	x3	x4	x5		
1	1	0	1	0	1	θ=1
1	0	1	0	1	2	θ=2
1-2M	2-M	1-M	0	0	-3M	

x1	x2	x3	x4	x5		
1	1	0	1	0	1	
0	-1	1	-1	1	1	θ=1
0	M+1	1-M	2M-1	0	-M-1	

x1	x2	x3	x4	x5	
1	1	0	1	0	1
0	-1	1	-1	1	1
0	2	0	M	M-1	-2

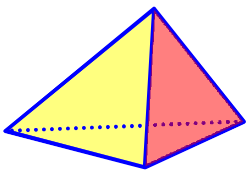
Terminologie

Qu'est-ce qu'un simplexe ?

- Un ensemble de vecteurs $y_1,\ldots,y_{k+1}$ dans IR^n ($k \leq n$) est indépendant au sens affine si les vecteurs $y_1-y_{k+1}, y_2-y_{k+1}\ldots,y_k-y_{k+1}$ sont linéairement indépendants.
- L'enveloppe convexe de k+1 vecteurs de IR^n indépendants au sens affine est appelée un simplexe à k dimensions.

Terminologie

- 3 points sont soit
  - colinéaires
  - indépendants au sens affine
- Le triangle est un simplexe à deux dimensions.
- La pyramide est un simplexe à 3 dimensions



Terminologie

- Géométriquement, on peut associer un simplexe à chaque base.
- On peut interpréter un pivotage (au sens de l'algorithme) comme le pivotage « physique » de ce simplexe.
- C'est de cette interprétation géométrique que viennent les termes simplexe et pivotage.