ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation linéaire

Recherche opérationnelle

GC-SIE

Algorithme du simplexe

Rappel

- Si un problème de programmation linéaire en forme standard possède une solution optimale, alors il existe une solution de base admissible qui soit optimale.
- Méthode du simplexe : passer d'une solution de base admissible à l'autre, en réduisant le coût.

Problème

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- avec
  - A matrice m lignes n colonnes
  - lignes de A linéairement indépendantes
  - On note P = {x ¦ Ax = b, x ≥ 0}

Problème en forme standard

Direction admissible

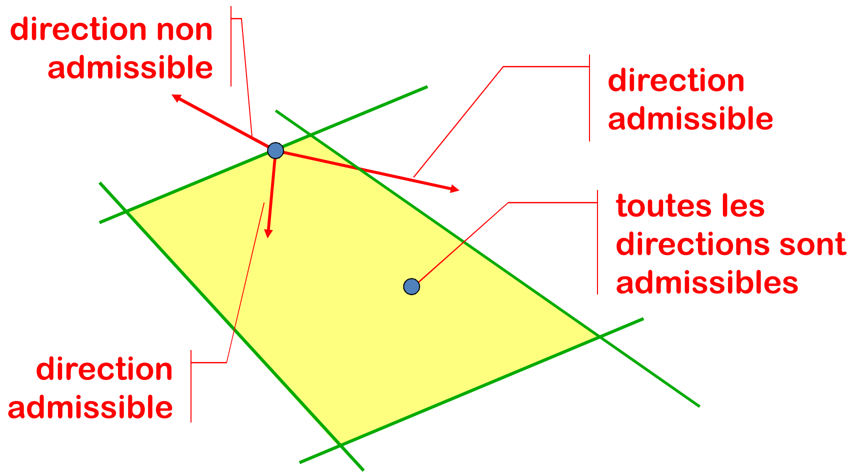
- Idée de l'algorithme:
  - Soit x_0 une solution de base admissible
  - Pour k=0,…. faire
    - Trouver x_{k+1} sol. de base adm. voisine telle que $c^T x_{k+1} < c^T x_k$
  - Jusqu'à ce qu'aucune sol. de base adm. voisine n'améliore l'objectif.
- On trouve alors un minimum local
- En programmation linéaire, minimum local = minimum global.

Direction admissible

- Soit $x \in P$. On va se déplacer le long d'une direction $d \in IR^n$.
- d doit nous maintenir dans P
- Définition :
  - Soit x un élément d'un polyèdre P. Un vecteur $d \in IR^n$ est appelé direction admissible en x s'il existe un scalaire positif θ tel que

$$x + \theta d \in P$$

Direction admissible



Direction admissible

- Soit x une solution de base admissible
- Soient B(1),…,B(m) les indices des variables de base
- Soit $B=[A_{B(1)} \ldots A_{B(m)}]$ la matrice de base associée
- $x_i = 0$ pour toute variable hors base
- $x_B=(x_{B(1)},\ldots,x_{B(m)}) = B^{-1}\, b$

Direction admissible

Comment déterminer $x+\theta d$?

- Choisir une variable j hors base (qui vaut 0)
- Augmenter sa valeur jusqu'à θ, tout en gardant les autres variables hors base à zéro. Donc :
  - $d_j = 1$
  - $d_i = 0$, $i \neq j$, i indice hors base

Direction admissible

- Il faut rester admissible :

$$A(x + \theta\, d) = b$$

$$Ax + \theta\, Ad = b$$

- x est admissible, et donc $Ax = b$
- Pour que $x + \theta\, d$ soit admissible, il faut que

$$Ad = 0$$

Direction admissible

$$
\begin{aligned}
Ad &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} A_i d_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} d_{B(i)} + \sum_{i \text{ hors base}} A_i d_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} d_{B(i)} + A_j &= 0 \\
B d_B + A_j &= 0
\end{aligned}
$$

Direction admissible

- Nous obtenons:

$$d_B = - B^{-1} A_j$$

- La direction d ainsi obtenue est appelée $j^{\text{ième}}$ direction de base
- Elle garantit que les contraintes d'égalité seront vérifiées lorsque l'on s'éloigne de x le long de d.
- Qu'en est-il des contraintes de non négativité ?

Direction admissible

- Variables hors-base:
  - x_j était nulle et devient positive ✓
  - x_i, $i \neq j$, restent à zéro ✓
- Variables de base.
  - Si x est une solution de base admissible non dégénérée, alors $x_B > 0$.
    Lorsque θ est suffisamment petit

$$x_B + \theta\, d_B \geq 0 \checkmark$$

Direction admissible

- Variables de base.
  - Si x est une solution de base admissible dégénérée, alors d n'est pas toujours une direction admissible.
  - C'est le cas lorsque qu'une variable de base $x_i = 0$ et que la composante correspondante d_i de la direction est négative.

Si x est une solution de base admissible non dégénérée, la $j^{\text{ième}}$ direction de base en x est admissible, pour tout j indice de base.

Conditions d'optimalité

- Quels sont les impacts sur la fonction objectif ?
- $c^T(x + \theta\ d) = c^T x + \theta\ c^T d$
- $c^T d$: taux de modification du coût le long de d

$$c^T d = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i = \sum_{i=1}^{m} c_{B(i)} d_{B(i)} + c_j = c_B^T d_B + c_j$$

Conditions d'optimalité

- Comme $d_B = -B^{-1} A_j$, on obtient

$$c^T d = c_j - c^T_B B^{-1} A_j$$

- Interprétation intuitive :
  - en augmentant x_j, cela coûte c_j
  - $- c^T_B B^{-1} A_j$ est le prix à payer pour vérifier Ax=b.

Définition :

- Soit x une solution de base, soit B la matrice de base associée, et c_B le vecteur de coût pour les variables de base. Pour chaque j, le cout réduit est défini par

$$\bar{c}_j = c_j - c^T_B B^{-1} A_j$$

Conditions d'optimalité

Note :

- le coût réduit a été introduit pour les variables hors base.
- il est défini pour toutes les variables.
- que vaut-il pour les variables de base ?

Conditions d'optimalité

- Soit B(i) indice d'une variable en base.
- Le coût réduit est $c_{B(i)} - c^T_B B^{-1} A_{B(i)}$
- $B = [A_{B(1)} \ldots A_{B(m)}]$
- $B^{-1} [A_{B(1)} \ldots A_{B(m)}] = I$
- $B^{-1} A_{B(i)} = e_i$ ($i^{\text{ème}}$ colonne de I)
- $\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - c^T_B B^{-1} A_{B(i)}$

$$= c_{B(i)} - c^T_B e_i$$
$$= c_{B(i)} - c_{B(i)}$$
$$= 0$$

Le coût réduit des variables de base est nul

Conditions d'optimalité

Théorème :

Considérons une solution de base admissible x, associée à une matrice de base B. Soit $\bar{c}$ le vecteur de coûts réduits correspondant.

1. Si $\bar{c} \geq 0$, alors x est optimal
2. Si x est optimal et non dégénérée, alors $\bar{c} \geq 0$.

Développement de la méthode du simplexe

- Supposons qu'aucune solution de base admissible ne soit dégénérée.
- Nous sommes à une solution de base admissible x
- Les coûts réduits $\bar{c}_j$ ont été calculés pour les variables hors-base.
- S'ils sont tous positifs, x est solution optimale. On arrête.

Développement de la méthode du simplexe

- Sinon, il existe une variable hors base x_j dont le coût réduit c_j est négatif.
- La $j^{ième}$ direction de base est donc une direction admissible le long de laquelle le coût diminue.
- La variable j devient positive. On dit qu'elle entre dans la base.

Développement de la méthode du simplexe

- On veut aller le plus loin possible le long de d, en restant admissible.
- On cherche θ^* tel que

$$\theta^* = \max \{\theta \geq 0 \mid x+\theta d \in P\}$$

- Comment calculer θ^* ?
- Comme d est admissible, la seule manière de « quitter » P est lorsqu'une variable devient négative.

Développement de la méthode du simplexe

- Si $d \geq 0$, alors $x + \theta\, d \geq 0$ pour tout θ.
  - plus θ est grand, plus le coût diminue
  - $\theta^* = +\infty$
  - le problème est non borné
- S'il existe i tel que $d_i < 0$, la contrainte

$$x_i + \theta\, d_i \geq 0$$

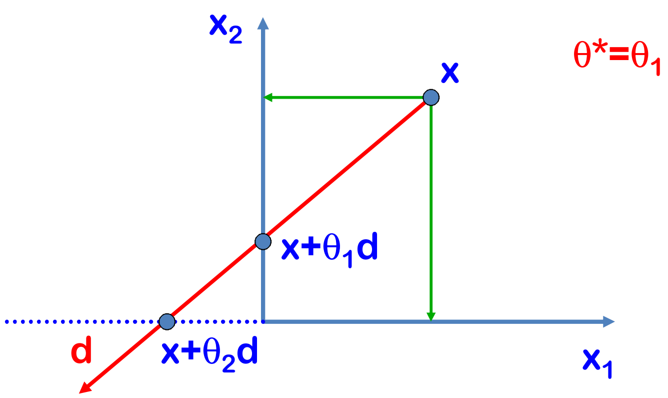
devient

$$\theta \leq -x_i / d_i$$

■ θ^* doit vérifier toutes les contraintes

$$\theta^* = \min_{\{i \mid d_i < 0\}}(-x_i/d_i)$$

Développement de la méthode du simplexe



Développement de la méthode du simplexe

Notes :

- Si x_i est une variable hors base, $d_i \geq 0$ (car d_i=0 ou d_i = 1)
- Il suffit donc de regarder les variables de base

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} (-x_{B(i)}/d_{B(i)})$$

- Comme x est non dégénéré, $x_{B(i)} > 0$ pour tout i=1,…m. Et donc, $\theta^* > 0$.

Exemple

$$\min_{x_1,x_2,x_3,x_4} 2x_1$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

- Base : B(1)=1 B(2)=2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

- Calcul des coûts réduits
- Uniquement pour les variables hors base (x_3 et x_4)

$$\begin{aligned} \bar{c}_3 &= c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 \\ &= 0 - (2 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= -3 \end{aligned}$$

- **Négatif. La 3ième direction de base réduit le coût.**

Exemple

3ième direction de base: $d_3 = 1$ $d_4 = 0$

$$d_B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$x + \theta d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\theta_1 = -x_1/d_1 = -1/(-3/2) = 2/3$

$$y = x + \theta^* d = x + \frac{2}{3} d = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Notes :

- Nouvelle solution de base admissible
- x_3 remplace x_1 dans la base
- A_2 et A_3 correspondent aux variables non nulles
- Base:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Développement de la méthode du simplexe

- Si d est la $j^{ième}$ direction de base
- Si k est l'indice tel que

$$\theta^* = -x_{B(k)}/d_{B(k)} = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} (-x_{B(i)}/d_{B(i)})$$

- On dit que
  - x_j entre dans la base
  - $x_{B(k)}$ sort de la base

Développement de la méthode du simplexe

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} | & & | & | & | & & | \\ A_{B(1)} & \cdots & A_{B(k-1)} & A_j & A_{B(k+1)} & \cdots & A_{B(m)} \\ | & & | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

Théorème :

- Les colonnes $A_{B(i)}$, $i \neq k$, et A_j sont linéairement indépendantes, et donc B est une matrice de base.
- Le vecteur $y=x+\theta^*d$ est une solution de base admissible associée à B.

Développement de la méthode du simplexe

Une itération de la méthode du simplexe :

1. Soit une base $B=[A_{B(1)},\ldots,A_{B(m)}]$ et x une solution de base admissible associée à B.
2. Calculer les coûts réduits pour chaque indice j hors base:

   $$\bar{c}_j = c_j - c^T_B B^{-1} A_j.$$

   S'ils sont tous non négatifs, la solution courante est optimale. STOP.

Développement de la méthode du simplexe

3. Choisir j tel que $c_j < 0$, et calculer

   $$d_B = -B^{-1} A_j.$$

   Si aucune composante de d_B n'est négative, alors le coût optimal est infini. STOP.

4. Calculer

   $$\theta^* = -x_{B(k)}/d_{B(k)} = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}}(-x_{B(i)}/d_{B(i)})$$

Développement de la méthode du simplexe

5. Former une nouvelle base en remplaçant $A_{B(k)}$ par A_j.

   Si y est la nouvelle solution de base admissible, les valeurs des nouvelles variables de base sont

   – $y_j = \theta^*$

   – $y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^* d_{B(i)}$, $i \neq k$.

Développement de la méthode du simplexe

Théorème :

Supposons que l'ensemble admissible est non vide, et que chaque solution de base admissible est non dégénérée. Alors, la méthode du simplexe se termine après un nombre fini d'itérations. A la fin, on obtient

- soit une solution optimale
- soit une direction d telle que $Ad=0$, $d\geq 0$ et $c^Td < 0$. Le coût optimal est alors $-\infty$.

Développement de la méthode du simplexe

Notes :

- Que se passe-t-il si l'algorithme est utilisé en présence de solutions de base admissibles dégénérées ?

1. Si la solution de base admissible courante x est dégénérée, il se peut que θ^* soit égal à zéro. C'est le cas si une variable de base $x_i = 0$ et que la composante correspondante $d_i < 0$.
   Cela n'empêche cependant pas de définir une nouvelle base, même si la solution de base admissible n'est pas modifiée.

Développement de la méthode du simplexe

2. Même si $\theta^* > 0$, il se peut que plus d'une variables de base deviennent zéro. La nouvelle solution de base admissible sera donc dégénérée.

- Il peut être utile de changer de base sans changer la solution de base admissible.
- Mais il faut éviter de cycler.

Développement de la méthode du simplexe

- Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B(1)=5, B(2)=6, B(3)=7

$B^{-1} = B = I$

$x_B = B^{-1}b = b$

$$c = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 20 \\ -1/2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c_B

Développement de la méthode du simplexe

- Coût réduit pour j = 1.

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 \\ &= -3/4 - (0 \ \ 0 \ \ 0)\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -3/4\end{aligned}$$

- La variable x_1 va rentrer en base.

Développement de la méthode du simplexe

- Direction :

$$\begin{aligned}d_B &= -B^{-1}A_1 \\ &= -\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/4 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\theta^*=0$

Développement de la méthode du simplexe

Note :

- Etape 3: Choisir j tel que $c_j < 0$.
- L'algorithme ne spécifie pas quelle variable choisir pour rentrer dans la base.
- Plusieurs règles existent.
- Retenons la règle de Bland :

Parmi les j tels que $c_j < 0$, choisir l'indice le plus petit

Tableau du simplexe

- Il y a plusieurs manières d'implémenter l'algorithme du simplexe. La méthode du tableau est l'une des plus efficaces.

Idée :

- Maintenir en permanence :

$$B^{-1}[A \mid b] = [B^{-1}A_1 \dots B^{-1}A_n \mid B^{-1}b]$$

- Cette matrice s'appelle le tableau du simplexe
- La dernière colonne contient les valeurs des variables en base.
- Les autres colonnes permettent de calculer c_j et d_B

Tableau du simplexe

- Exemple :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Min } z = & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\text{Min } z = & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 20 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 20 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 20 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Tableau du simplexe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

B(1)=4, B(2)=5, B(3)=6

$$c = \begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B=B^{-1}=I

Tableau du simplexe

$B^{-1}A$ $B^{-1}b$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

Tableau du simplexe

Définitions :

Lors d'une itération du simplexe :

- Si j est l'indice de la variable qui entre en base, la colonne $B^{-1}A_j$ est appelée colonne du pivot.
- Si la variable de base B(k) sort de la base, la ligne k du tableau est appelée ligne du pivot.
- L'élément qui se trouve sur la ligne du pivot et la colonne du pivot est appelé le pivot.

Tableau du simplexe

Notes :

- Pour les variables en base :

$$B^{-1} A_{B(i)} = e_i$$

Si i est l'indice d'une variable en base, la colonne B(i) du tableau est e_i. Elle contient uniquement des zéros, sauf en ligne i dont l'élément est 1.

Tableau du simplexe

$B^{-1}A$ $B^{-1}b$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

B(1)=4, B(2)=5, B(3)=6

Tableau du simplexe

- Lecture du tableau :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	$= x_4$
2	1	2	0	1	0	20	$= x_5$
2	2	1	0	0	1	20	$= x_6$
-10	-12	-12	0	0	0	0	

Tableau du simplexe

- On augmente le tableau avec une ligne relative aux coûts :

$$[c^T - c^T_B B^{-1} A \mid -c^T_B B^{-1} b]$$

- $-c^T_B B^{-1} b = -c^T_B x_B = -c^T x$

  - fonction objectif

- $c^T - c^T_B B^{-1} A$

  coûts réduits

Tableau du simplexe

- Le tableau complet sera donc

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
$c^T - c_B^T B^{-1}A$	$-c_B^T B^{-1}b$

Tableau du simplexe

$B^{-1}A$ $B^{-1}b$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

$c^T - c_B^T B^{-1}A$ $-c_B^T B^{-1}b$

Tableau du simplexe

Appliquons l'algorithme

1. Solution de base admissible :

   B(1)=4, B(2)=5, B(3)=6

   (0,0,0,20,20,20)

2. Coûts réduits:
   - dernière ligne du tableau
3. Choisir un coût réduit négatif
   - c_1 = -10, c_2= -12, c_3=-12
   - Règle de Bland: j = 1
   - $-d_B = B^{-1}A_j$ = colonne j = $(1\ 2\ 2)^T$

Tableau du simplexe

4. Calcul de θ*

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	θ_1=20/1
2	1	2	0	1	0	20	θ_2=20/2
2	2	1	0	0	1	20	θ_3=20/2
-10	-12	-12	0	0	0	0	

$-d_B$ x_B

θ*=10

k=2

Tableau du simplexe

5. Former une nouvelle base

- Ancien tableau $B^{-1}[A \mid b]$
- Nouveau tableau $B^{-1}[A \mid \bar{b}]$
- Idée : trouver une matrice Q telle que

$$QB^{-1} = \bar{B}^{-1}$$

$$QB^{-1}\bar{B} = I$$

Tableau du simplexe

Définition :

- Soit une matrice C. L'opération consistant à ajouter un multiple d'une ligne à cette même ligne ou à une autre ligne est appelée une opération élémentaire de ligne.
- Cela revient à pré-multiplier C par une matrice carrée Q, construite de manière adéquate.

Tableau du simplexe

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Multiplier la 3ième ligne par 2 et l'ajouter à la première

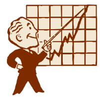
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad QC = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Tableau du simplexe

- D'une manière générale,
  - multiplier la ligne j par β
  - et l'ajouter à la ligne $i \neq j$

  revient à pré-multiplier par $Q = I + D_{ij}$
  où D_{ij} contient uniquement des 0, sauf la ligne i, colonne j, qui contient β.
- Q est inversible
- Une suite d'opérations élémentaires de ligne revient donc à prémultiplier par une matrice inversible.

Tableau du simplexe



- $B = [A_{B(1)},\ldots,A_{B(k-1)},A_{B(k)},A_{B(k+1)},\ldots,A_{B(m)}]$
- $\bar{B} = [A_{B(1)},\ldots,A_{B(k-1)},A_j,A_{B(k+1)},\ldots,A_{B(m)}]$
- $B^{-1}A_{B(i)} = e_i$
- $B^{-1}\bar{B} = [e_1,\ldots,e_{k-1},B^{-1}A_j,e_{k+1},\ldots,e_m]$
- Si $u = B^{-1}A_j$, on a

$$B^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & & u_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & u_k & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & u_m & & 1 \end{pmatrix}$$

Tableau du simplexe

- Comment transformer cette matrice en l'identité ?
- Utilisons des opérations élémentaires de ligne.

1. Pour tout $i \neq k$, on ajoute la $k^{\text{ième}}$ ligne multipliée par $-u_i/u_k$
2. On divise la $k^{\text{ième}}$ ligne par u_k

- Cela revient à prémultiplier par une matrice Q
- $Q\bar{B}^{-1}B = I$ et donc $Q\bar{B}^{-1} = \bar{B}^{-1}$

Tableau du simplexe

Si on applique les opérations élémentaires de ligne suivantes à la matrice B^{-1}, on obtient la matrice B^{-1} :

1. Pour tout $i \neq k$, on ajoute la $k^{ième}$ ligne multipliée par $-u_i/u_k$
2. On divise la $k^{ième}$ ligne par u_k

Ces opérations sont donc appliquées au tableau du simplexe.

Cela s'appelle un pivotage.

Tableau du simplexe

Reprenons l'exemple :

- B(1)=4, B(2)=5, B(3)=6
- x^T = (0, 0, 0, 20, 20, 20)
- θ^* = 10
- d^T = (1, 0, 0, -1, -2, -2)
- $y^T = (x + \theta^* d)^T$ = (10, 0, 0, 10, 0, 0)
- x_1 rentre en base
- x_5 sort de base
- Attention : y est sol. de base adm. dégénérée.

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	2	1	0	0	20
2	1	2	0	1	0	20
2	2	1	0	0	1	20
-10	-12	-12	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	3/2	1	1	-1/2	0	10
1	1/2	1	0	1/2	0	10
0	1	-1	0	-1	1	0
0	-7	-2	0	5	0	100

Tableau du simplexe

Dernière ligne du tableau

- Avant pivotage

$$[-c_B^T B^{-1} b \,\vdots\, c^T - c_B^T B^{-1} A]$$

$$[0 \,\vdots\, c^T] - c_B^T B^{-1} [b \,\vdots\, A]$$

- Après pivotage, on peut montrer :

$$[0 \,\vdots\, c^T] - c_{\bar{B}}^T \bar{B}^{-1} [b \,\vdots\, A]$$

Tableau du simplexe

Algorithme

1. Soit une matrice de base B, une solution de base admissible x et le tableau du simplexe associés.
2. Examiner les coûts réduits dans la dernière ligne du tableau.
   S'ils sont tous non négatifs, la solution de base admissible courante est optimale. STOP.
   Sinon, choisir j tel que $c_j < 0$

Tableau du simplexe

3. Soit $u=B^{-1}A_j$, la $j^{ième}$ colonne du tableau.
   Si aucune composante de u n'est positive, le coût optimal est $-\infty$. STOP.
4. Pour chaque i tel que $u_i > 0$, calculer $x_{B(i)}/u_i$. Soit k l'indice de la ligne correspondant au rapport le plus petit. La colonne $A_{B(k)}$ sort de la base. La colonne A_j rentre en base.
5. Effectuer des opérations élémentaires de ligne pour que la colonne du pivot ne contienne que des zéros, sauf à l'emplacement du pivot, qui doit être 1.

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	2	2	1	0	0	20	θ_1=20/1
2	1	2	0	1	0	20	θ_2=20/2
2	2	1	0	0	1	20	θ_3=20/2
-10	-12	-12	0	0	0	0	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	3/2	1	1	-1/2	0	10	θ_1=10
1	1/2	1	0	1/2	0	10	θ_2=10
0	1	-1	0	-1	1	0	
0	-7	-2	0	5	0	100	

Dégéné-
rescence

Attention : Bland n'est pas respecté ici

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	3/2	1	1	-1/2	0	10	θ_1=10
1	1/2	1	0	1/2	0	10	θ_2=10
0	1	-1	0	-1	1	0	
0	-7	-2	0	5	0	100	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	3/2	1	1	-1/2	0	10	θ_1=20/3
1	-1	0	-1	1	0	0	
0	5/2	0	1	-3/2	1	10	θ_3=4
0	-4	0	2	4	0	120	

Tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	3/2	1	1	-1/2	0	10	θ_1=20/3
1	-1	0	-1	1	0	0	
0	5/2	0	1	-3/2	1	10	θ_3=4
0	-4	0	2	4	0	120	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	1	2/5	2/5	-3/5	4
1	0	0	-3/5	2/5	2/5	4
0	1	0	2/5	-3/5	2/5	4
0	0	0	18/5	8/5	8/5	136

Tableau du simplexe

- Lecture du tableau :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	0	1	2/5	2/5	-3/5	4	= x_3
1	0	0	-3/5	2/5	2/5	4	= x_1
0	1	0	2/5	-3/5	2/5	4	= x_2
0	0	0	18/5	8/5	8/5	136	

Tableau du simplexe

- Lorsque certaines solutions de base admissibles sont dégénérées, l'algorithme peut cycler. Pour l'empêcher, régle de Bland.
- Variable entrant en base: choisir l'indice j le plus petit tel que le coût réduit est négatif
- Variable sortant de base : en cas d'égalité pour θ^*, choisir la variable d'indice minimale.