ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation linéaire

Recherche opérationnelle

GC-SIE

Géométrie de la programmation linéaire

Polyèdres

Définitions :

- Un **polyèdre** est un ensemble qui peut être décrit comme

$$P=\{x \in IR^n \mid Ax \geq b\}$$

où A est une matrice m x n et b un vecteur de IR^m.

- Note : l'ensemble admissible d'un programme linéaire est un polyèdre.

Polyèdres

Définitions :

- Un ensemble de la forme

$$P=\{x \in IR^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

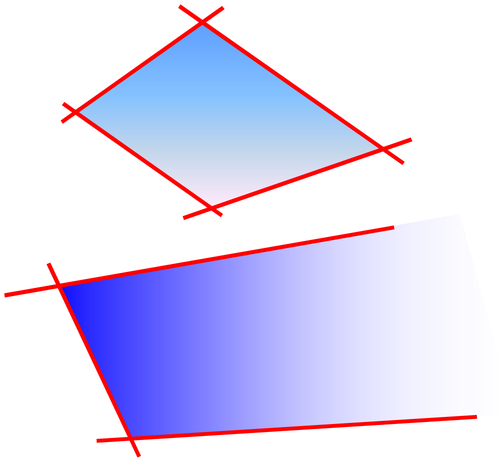
est un **polyèdre en forme standard**.

- Un polyèdre P est dit **borné** si il existe une constante c telle que $\|x\| \leq c$ pour tout $x \in P$.

Polyèdres

Borné

Non borné



Polyèdres

Définitions :

- Soient a un vecteur non nul de IR^n et b un scalaire.
- L'ensemble

  $$\{x \in IR^n \mid a^Tx=b\}$$

  est appelé un **hyperplan**.
- L'ensemble

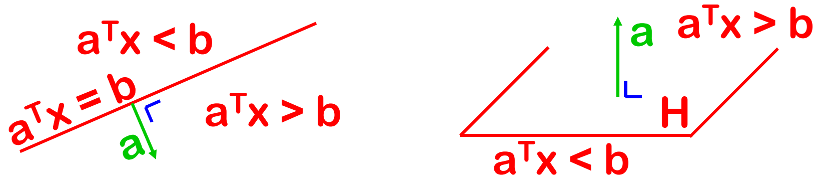
  $$\{x \in IR^n \mid a^Tx \geq b\}$$

  est appelé un **demi-espace**.

Polyèdres

Notes :

- Un hyperplan est la frontière du demi-espace correspondant.
- Le vecteur a est perpendiculaire à l'hyperplan qu'il définit.

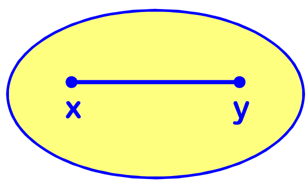


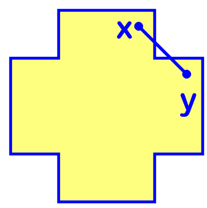
Ensembles convexes

Définition :

- Un ensemble $S \subset IR^n$ est **convexe** si pour tout $x,y \in S$, et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in S$$





Ensembles convexes

Définitions :

- Soient $x_1,\ldots x_k$ des vecteurs de IR^n, et soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ des scalaires non négatifs tels que

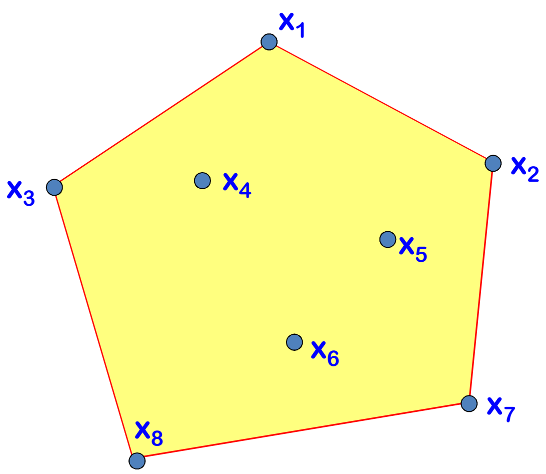
  $$\Sigma_{i=1,\ldots k}\lambda_i = 1$$

  Le vecteur

  $$y = \Sigma_{i=1,\ldots k}\lambda_i x_i$$

  est une **combinaison convexe** des vecteurs $x_1,\ldots x_k,$

Ensembles convexes



Points extrêmes et sommets

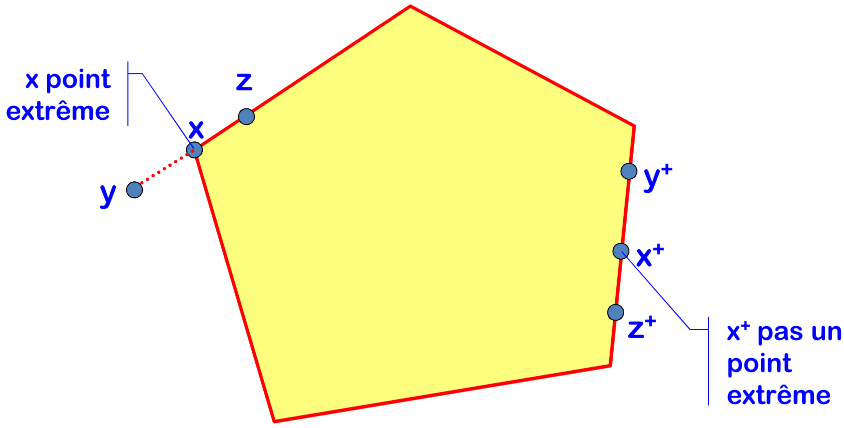
- Concepts géométriques :
  - Point extrême
  - Sommet
- Concept algébrique :
  - Solution de base admissible
- Soit P un polyèdre, et soit $x^* \in$ P. Alors,
  x^* est un point extrême ssi
  x^* est un sommet ssi
  x^* est une solution de base admissible

Points extrêmes et sommets

Définition :

- Soit P un polyèdre. Un vecteur $x \in$ P est un **point extrême** de P si on ne peut pas trouver deux vecteurs y et z dans P, différents de x, et un scalaire $\lambda \in [0,1]$ tels que
$$x = \lambda y + (1-\lambda) z$$
- Soit P un polyèdre. Un vecteur $x \in$ P est un **point extrême** de P si on ne peut pas l'exprimer comme combinaison convexe de deux autres points de P.

Points extrêmes et sommets



Points extrêmes et sommets

Définition :

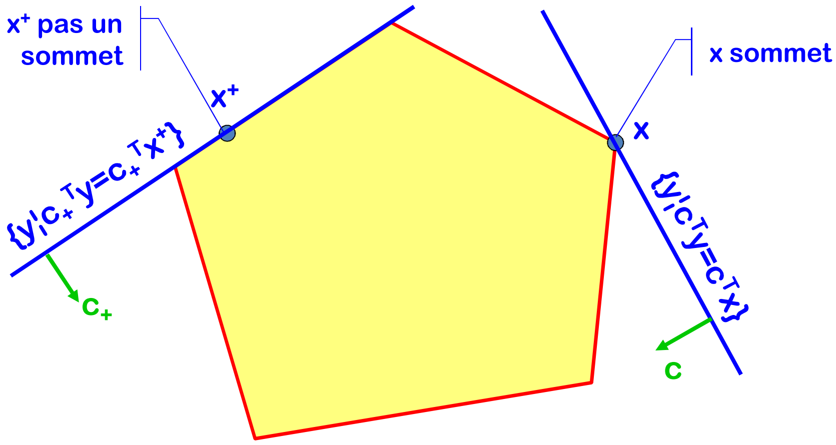
- Soit P un polyèdre. Un vecteur $x \in P$ est un **sommet** de P s'il existe c tel que

$$c^T x < c^T y$$

pour tout y dans P différent de x.

- Note : x est un sommet de P ssi il existe un hyperplan $H=\{y \mid c^T y = c^T x\}$ qui rencontre P seulement en x tel que P soit entièrement d'un côté de H.

Points extrêmes et sommets



Points extrêmes et sommets

Définition :

- Considérons un polyèdre de IR^n défini par les contraintes suivantes :
  - $a_i^T x \geq b_i \; i \in M_1$
  - $a_i^T x \leq b_i \; i \in M_2$
  - $a_i^T x = b_i \; i \in M_3$

  où M_1, M_2 et M_3 sont des ensembles finis d'indices, chaque a_i est un vecteur de IR^n et chaque b_i un scalaire.

  Si un vecteur x^* de IR^n vérifie $a_i^T x^* = b_i$ on dit que la contrainte i est **active** en x^*.

Points extrêmes et sommets

Définition :

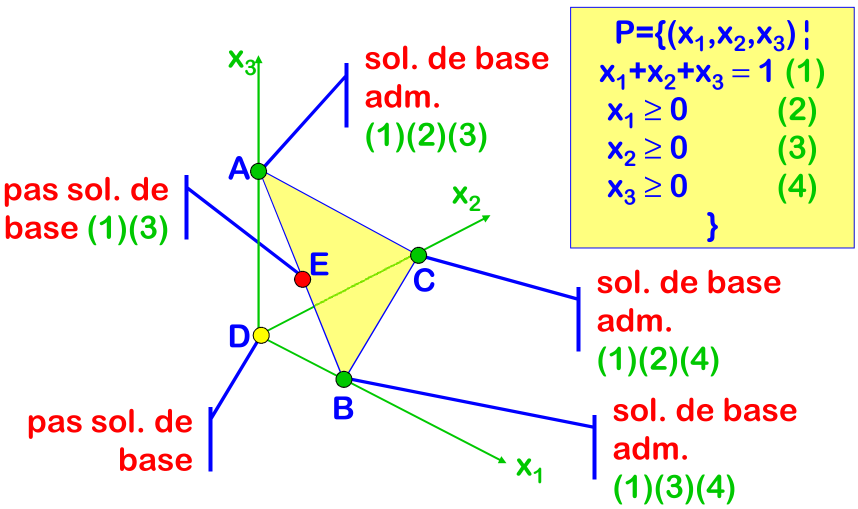
- Considérons un polyèdre P défini par des contraintes d'égalité et d'inégalité, et soit x* un vecteur de IR^n.

  x* est une **solution de base** si

  1) toutes les contraintes d'égalité sont actives,
  2) parmi les contraintes actives en x*, il y en a n qui soient linéairement indépendantes.

  x* est une **solution de base admissible** si x* est une solution de base qui vérifie toutes les contraintes.

Points extrêmes et sommets



Points extrêmes et sommets

- LPLab2D

Polyèdres en forme standard

- But : simplification de la définition de solution de base
- Polyèdre $P = \{x \in IR^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$
- $A \in IR^{m \times n}$
- m : nombre de contraintes d'égalité
- n : nombre de variables
- Hypothèse : A est de rang plein, c-à-d m lignes de A sont linéairement indépendantes.

Polyèdres en forme standard

- Par définition, toute solution de base vérifie $Ax = b$.
- Cela donne m contraintes actives.
- Pour avoir une solution de base, c-à-d n contraintes actives, il faut donc que n-m variables $x_i = 0$.
- Attention : le choix de ces variables n'est pas arbitraires.

Polyèdres en forme standard

Théorème :

- Soit un polyèdre $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.
- $A \in IR^{m \times n}$ est de rang plein.
- x^* est solution de base ssi
  - $Ax^* = b$
  - Il existe m indices B(1),…,B(m) tels que
    - Les colonnes $A_{B(1)},\ldots,A_{B(m)}$ sont lin. indép.
    - Si $i \neq B(1),\ldots,B(m)$, alors $x_i^* = 0$.

Polyèdres en forme standard

Comment obtenir une solution de base ?

- Choisir m colonnes de A lin. indép.
- Soient $B=[A_{B(1)},\ldots,A_{B(m)}]$ la matrice composée de ces colonnes.
- B est appelée matrice de base
- Imposer $x_i = 0$ pour tout $i \neq B(1),\ldots,B(m)$
- Résoudre le système Bx=b pour les inconnues $x_{B(1)},\ldots,x_{B(m)}$.
- Note : B est inversible

Polyèdres en forme standard

Ax=b

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

B(1)=4 B(2)=5 B(3)=6 B(4)=7

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$

Polyèdres en forme standard

Résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 8$ $x_5 = 12$ $x_6 = 4$ $x_7 = 6$

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 8, x_5 = 12, x_6 = 4, x_7 = 6$

Solution de base admissible

Polyèdres en forme standard

Ax=b

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

B(1)=3 B(2)=5 B(3)=6 B(4)=7

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_4 = 0$

Polyèdres en forme standard

Résoudre :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 4$ $x_5 = -12$ $x_6 = 4$ $x_7 = 6$

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = -12, x_6 = 4, x_7 = 6$

Solution de base (non admissible)

Polyèdres en forme standard

- Résumé :

solution de base admissible =
sommet =
point extrême

choix d'un sommet =
choix de n colonnes linéairement indépendantes de A

Optimalité

Théorème :

- Considérons le programme linéaire

$$\min c^T x$$
$$\text{sous contraintes } x \in P$$

où P est un polyèdre.

- Si P possède au moins un point extrême
- Alors
  - soit il existe un point extrême optimal
  - soit le coût optimal est $-\infty$

Optimalité

- Théorème :
  - Tout polyèdre non vide et borné, ainsi que tout polyèdre en forme standard non vide possède au moins une solution de base admissible
- Corollaire :
  - Considérons le programme linéaire

    $$\min c^T x \text{ sous contraintes } x \in P$$

    où P est un polyèdre non vide .
  - Alors
    - soit il existe un point extrême optimal
    - soit le coût optimal est $-\infty$

Dégénérescence

Rappel : solution de base

- Considérons un polyèdre P défini par des contraintes d'égalité et d'inégalité, et soit x* un vecteur de IR^n.

  x* est une **solution de base** si

  1) toutes les contraintes d'égalité sont actives,
  2) parmi les contraintes actives en x*, **il y en a n qui soient linéairement indépendantes.**

- Que se passe-t-il s'il y a plus de n contraintes actives ?

Dégénérescence

Définitions :

- Une solution de base $x \in IR^n$ est dite **dégénérée** si plus de n contraintes sont actives en x.
- Soit $P=\{x\in IR^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ un polyèdre en forme standard, avec $A \in IR^{m \times n}$

  Une solution de base x est **dégénérée** si plus de n-m de ses composantes sont nulles.

Dégénérescence

Ax=b

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

B(1)=1 B(2)=2 B(3)=3 B(4)=7

$x_4 = 0$ $x_5 = 0$ $x_6 = 0$

Dégénérescence

Résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 4$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$ $x_7 = 6$

$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 6$

n-m=7-4=3 4 composantes nulles

Solution de base admissible dégénérée