ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Optimisation linéaire

Recherche opérationnelle

GC-SIE

Introduction et exemples

Formulation

- Ceci est un problème de programmation linéaire:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.c.} & x_1 & + & x_2 & & & + x_4 & \leq 2 \\
 & & & 3x_2 & - & x_3 & & = 5 \\
 & & & & & x_3 & + x_4 & \geq 3 \\
 & x_1 & & & & & & \geq 0 \\
 & & & & & x_3 & & \leq 0
\end{array}
$$

Formulation

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & c^T x & & \\
\text{s.c.} & a_1^T x & \leq & 2 \\
 & a_2^T x & = & 5 \\
 & a_3^T x & \geq & 3 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
c^T & = & (\ 2 \ -1 \ \ 4 \ 0 \ ) \\
a_1^T & = & (\ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ 1 \ ) \\
a_2^T & = & (\ 0 \ \ 3 \ -1 \ 0 \ ) \\
a_3^T & = & (\ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ 1 \ )
\end{array}
$$

Formulation

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.c.} & -x_1 & - & x_2 & & & - x_4 & \geq -2 \\
 & & & 3x_2 & - & x_3 & & \geq 5 \\
 & & - & 3x_2 & + & x_3 & & \geq -5 \\
 & & & & & x_3 & + x_4 & \geq 3 \\
 & x_1 & & & & & & \geq 0 \\
 & & & & - & x_3 & & \geq 0
\end{array}
$$

Formulation

$$
\begin{array}{l}
\min \ c^T x \\
\text{s.c.} \ \ Ax \geq b
\end{array}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & a_1^T & \cdots \\ \cdots & a_2^T & \cdots \\ \cdots & a_3^T & \cdots \\ \cdots & a_4^T & \cdots \\ \cdots & a_5^T & \cdots \end{pmatrix}
$$

$$
b = (-2 \ \ 5 \ \ -5 \ \ 3 \ \ 0 \ \ 0)
$$

Définitions

- $x_1,\ldots x_n$: variables de décisions
- Si le vecteur x satisfait toutes les contraintes, x est une solution admissible.
- L'ensemble de toutes les solutions admissibles est l'ensemble admissible ou la région admissible.

Définitions

- La fonction $c^T x$ est la fonction objectif ou fonction de coût.
- Une solution admissible x^* qui minimise la fonction objectif (i.e. $c^T x^* \leq c^T x$ pour tout x admissible) est appelée solution admissible optimale ou solution optimale.

Définitions

- Forme standard

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.c.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Forme canonique

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.c.}\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple

Un atelier de montage peut assembler deux produits finis différents, notés P_1 et P_2. Chaque produit est fabriqué à partir de 3 matières premières, M_1, M_2 et M_3. On connaît pour chacune de ces matières premières :

1. le nombre b_i d'unités disponibles pour le prochain cycle de production, $i = 1, 2, 3$;
2. le nombre a_{ij} d'unités nécessaires à l'assemblage d'une unité du produit P_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$;
3. le prix d'achat unitaire ρ_i, $i = 1, 2, 3$.

De plus, on connaît, pour chacun des produits finis, son prix de vente unitaire σ_j, $j = 1, 2$.

Exemple

Pour le directeur de l'atelier, le problème est d'utiliser « au mieux » les matières premières à disposition. Supposons qu'il décide de produire x_1 unités de produit P_1 et x_2 unités de P_2. Le revenu associé à la production d'une unité de produit j est σ_j mais ce prix ne tient pas compte du coût des matières premières :

Le profit associé à la production d'une unité de produit j est $\sum_{i=1}^{3} \rho_i a_{ij}$

$$c_j = \sigma_j - \sum_{i=1}^{3} \rho_i a_{ij} \qquad j = 1, 2.$$

Exemple

Si x_j unités de produit j sont assemblées, le profit correspondant est $c_j x_j$ et le profit total sur le cycle de production est :

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Le but du directeur est de maximiser ce profit. Ses décisions sont cependant sujettes à des contraintes.

Premièrement, les quantités produites doivent être non négatives, elles doivent satisfaire les contraintes :

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2.$$

Exemple

D'autre part, les productions possibles sont limitées par les matières premières à disposition. La quantité de matière première M_i nécessaire à la réalisation d'un plan de production donné est : $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$, et les quantités produites doivent satisfaire les contraintes :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Exemple

Le problème du directeur est de déterminer le nombre d'unités x_1 et x_2 à produire

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.c.} \quad & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad i = 1, 2, 3 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

Hypothèses

1. Hypothèse de proportionnalité et additivité ou hypothèse de linéarité

   La contribution des variables de décision à la fonction objectif et aux contraintes est proportionnelle à leur valeur

   $3x_1$ ✓ ¾ x_2 ✓ $1/x_1$ ✗ log(x2) ✗

   La contribution de chaque variable est indépendante de la valeur des autres variables

   $z=3x_1+x_2$ ✓ $z=2\ x_1\ x_2$ ✗

Si elle est violée :

Programmation non linéaire

Hypothèses

2. Hypothèse de divisibilité:

Les variables prennent des valeurs fractionnaires.

Si elle est violée :

Programmation en nombres entiers

3. Hypothèse de certitude :

Chaque paramètre est connu précisément.

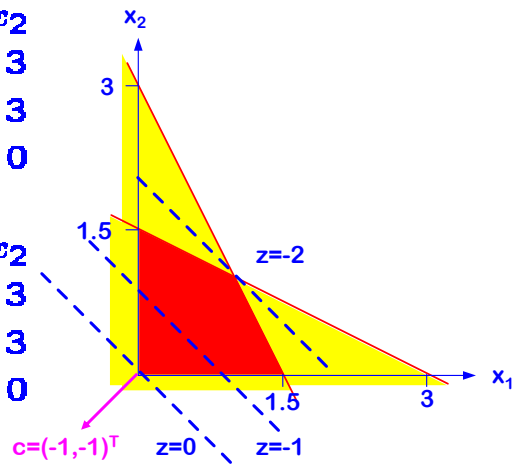
Si elle est violée :

Programmation stochastique

Représentation graphique

$$\min z = -x_1 - x_2$$
$$\text{s.c. } x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min z = -x_1 - x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Représentation graphique

- Identification du domaine admissible
- Identification des lignes de niveaux
- Lignes de niveaux perpendiculaires au vecteur *c*, et donc parallèles entre elles
- A chaque valeur de *z* correspond une ligne de niveau
- La valeur de *z* augmente dans la direction de *c*
- *LPLab2D*