ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Recherche opérationnelle

GC-SIE

Plan du cours

- Optimisation linéaire
  - Introduction et exemples
  - Géométrie
  - Algo. du simplexe (phase II)
  - Algo. du simplexe (phase I)
  - Dualité

Plan du cours (suite)

- Optimisation non-linéaire
  - Introduction et exemples
  - Conditions d'optimalité
  - Plus forte pente et Newton
  - Variations sur Newton
  - Moindres carrés

Plan du cours (suite)

- Problèmes de réseaux
  - Introduction et exemples
  - Problème du plus court chemin
  - Problème de flot maximal
  - Problème de transbordement

Plan du cours (suite)

- Problèmes en nombres entiers
  - Introduction et exemples
  - Algorithmes exacts
  - Algorithmes d'approximation
  - Heuristiques
    - Recuit simulé
    - Algorithmes génétiques
- Introduction à la simulation

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Introduction

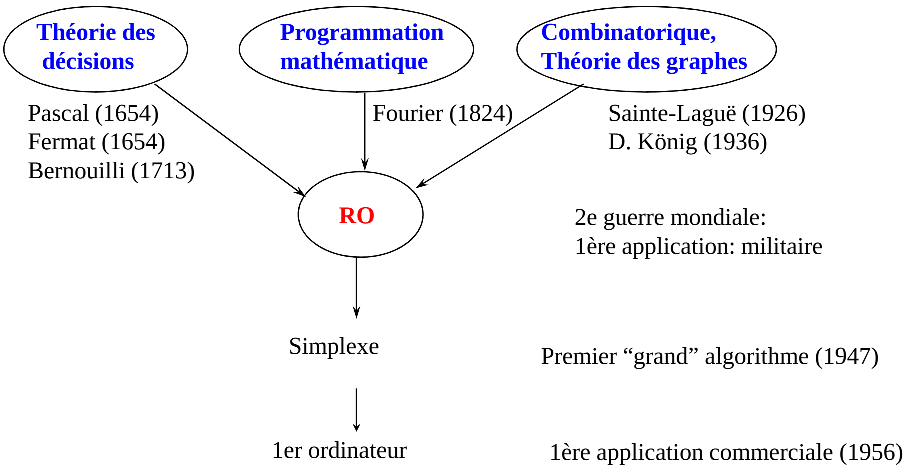
Recherche opérationnelle

Génie Civil

Chapitre 1

- Introduction à l'optimisation
  - Démarche générale
  - Exemples
  - Formulation
  - Approche intuitive
  - Types de problèmes
  - Algorithmes

Historique

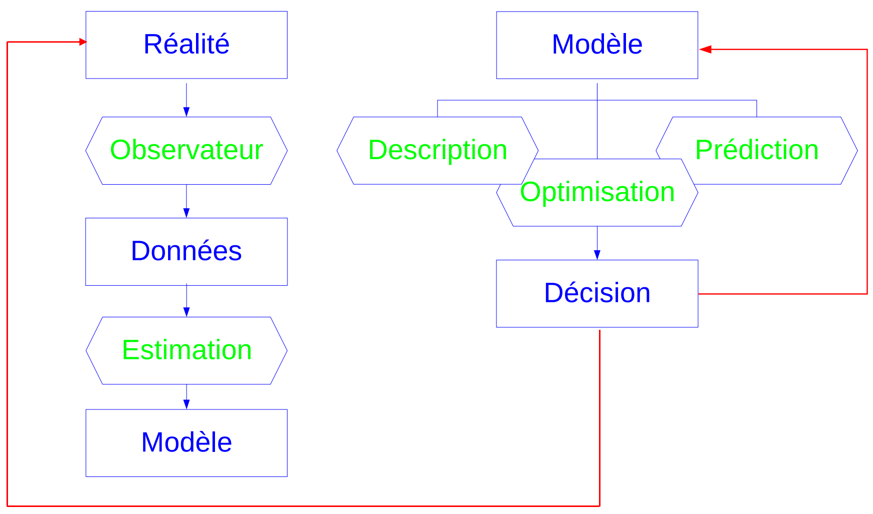


Mots clés

- Modélisation
  - Simplification de la réalité pour pouvoir en appréhender certains aspects
- Optimisation
  - Identification d’une configuration qui soit meilleure que toute autre suivant un critère spécifique
- Simulation
  - Représentation artificielle d’un fonctionnement réel

Statistiques

Recherche opérationnelle



Exemple : Geppetto

Geppetto, Inc., jouets en bois.
Soldats : vendus 27F et coûtant 10F de matériel brut.
Coûts généraux : 14F par soldat.
Qté. de travail : 1 h de menuiserie 2 h de finissage
Trains : vendus 21F et coûtant 9F de matériel brut.
Coûts généraux : 10F par train.
Qté. de travail : 1 h de menuiserie et 1 h de finissage
Au maximum, on dispose de
80 h de menuiserie et
100 h de finissage par semaine.
Demande : illimitée pour les trains,
maximum 40 soldats par semaine.

Exemple : Geppetto

Comment maximiser les bénéfices de Geppetto ?
Modélisation :

1. Variables de décision :
   x_1 = nombre de soldats produits par semaine
   x_2 = nombre de trains produits par semaine
2. Fonction objectif :
   Bénéfice = revenu – coût du matériel – coûts généraux
   Revenu = revenu pour les soldats + revenu pour les trains
   = (francs/soldat)(soldats/semaine) + (francs/train)(trains/semaine)
   = $27\ x_1 + 21\ x_2$
   Coût du matériel = $10\ x_1 + 9\ x_2$
   Coûts généraux = $14\ x_1 + 10\ x_2$

Exemple : Geppetto

Bénéfice = $(27 x_1 + 21 x_2)-(10 x_1 + 9 x_2)-(14 x_1 + 10 x_2)$
$= 3 x_1 + 2 x_2$

On notera Maximiser $z = 3 x_1 + 2 x_2$

3. Contraintes :

a) Pas plus de 100 h de finissage par semaine
b) Pas plus de 80 heures de menuiserie par semaine
c) Pas plus de 40 soldats par semaine

Finissage/semaine =
(finissage/soldat)(soldats/semaine) +
(finissage/train)(trains/semaine) =
$2 x_1 + x_2$

Contrainte a : $2 x_1 + x_2 \leq 100$
Contrainte b : $x_1 + x_2 \leq 80$
Contrainte c : $x_1 \leq 40$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Formulation

- Sous quelles formes présenter le problème d'optimisation ?
- Formes standard ou canonique
- Exigences des algorithmes
- Nécessité de transformer le problème

Formulation

- Fonction objectif

  min f(x)   max f(x)

- Contraintes

  g(x) $\leq$ cte   g(x) $\geq$ cte   g(x) = cte

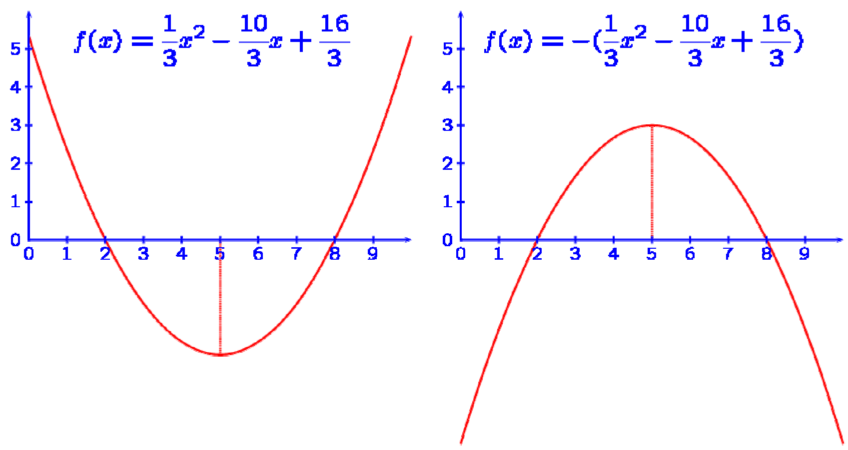
- Contraintes de bornes

  $l \leq x \leq u$

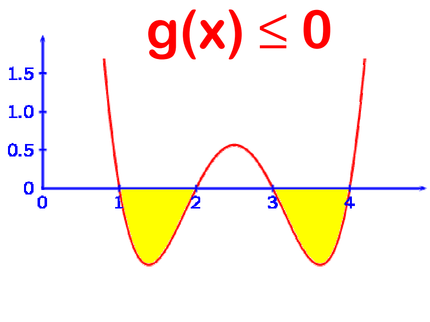
- Contraintes de signe

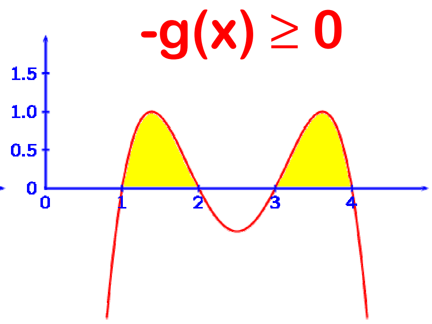
  $x \geq 0$

Formulation : transformations



Formulation : transformations





Formulation : règles

$$\min f(x) \Rightarrow -\max(-f(x))$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) & \leq & 0 \\ g(x) & \geq & 0 \end{cases}$$

$$g(x) \leq 0 \Rightarrow -g(x) \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x & = & y - z \\ y & \geq & 0 \\ z & \geq & 0 \end{cases}$$

$$g(x) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) + y & = & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

$$x \geq a \Rightarrow \begin{cases} x & = & y + a \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

Formulation : exemple

$$\max -x^2 + \sin y \qquad -\min x^2 - \sin y$$

sous contraintes

$$6x - y^2 \geq 1 \qquad -6x + y^2 + 1 \leq 0$$

$$x^2 + y^2 = 3 \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 - 3 &\leq 0 \\ -x^2 - y^2 + 3 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$x \geq 2 \qquad \begin{aligned} x &= x_1 + 2 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$y \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} y &= y_1 - y_2 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Formulation : exemple

$$\max -x^2 + \sin y \qquad -\min (x_1 + 2)^2 - \sin(y_1 - y_2)$$

sous contraintes sous contraintes

$$6x - y^2 \geq 1 \qquad -6(x_1+2) + (y_1 - y_2)^2 + 1 \leq 0$$

$$(x_1+2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - 3 \leq 0$$

$$x^2 + y^2 = 3 \qquad -(x_1+2)^2 - (y_1 - y_2)^2 + 3 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x \geq 2 \qquad y_1 \geq 0$$

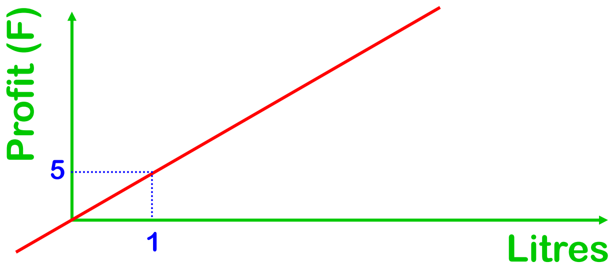
$$y_2 \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R}$$

Approche intuitive

- Considérons des exemples triviaux

1. Une entreprise gagne 5F chaque fois qu'elle vend 1 litre de produit chimique. Elle désire maximiser son profit.

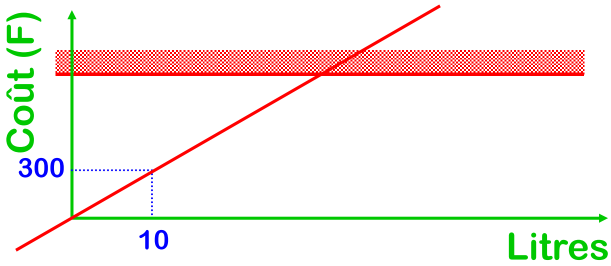


Approche intuitive

- Observations :
  - Fonction objectif linéaire
  - Pas de contraintes
  - Solution infinie
- Commentaire :
  - La solution est toujours infinie lorsque la fonction objectif est linéaire et qu'il n'y a pas de contraintes

Approche intuitive

2. Un laboratoire achète 30F le litre de produit chimique. Il dispose d'un budget de 1000F. Quelle quantité maximale peut-il acheter ?

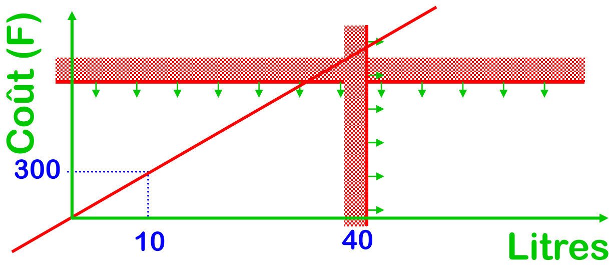


Approche intuitive

- Observations :
  - Réponse évidente : 1000 / 30 litres
  - Bien que l'on puisse dépenser 1000F ou moins, on dépense exactement 1000F
- Commentaires :
  - Si la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, il y a au moins une contrainte active à la solution
  - La contrainte $g(x) \leq 0$ est dite active en x^* ssi $g(x^*)=0$

Approche intuitive

3. Un laboratoire achète 30F le litre de produit chimique. Il dispose d'un budget de 1000F et doit en acheter au minimum 40 litres. Quelle quantité maximale peut-il acheter ?

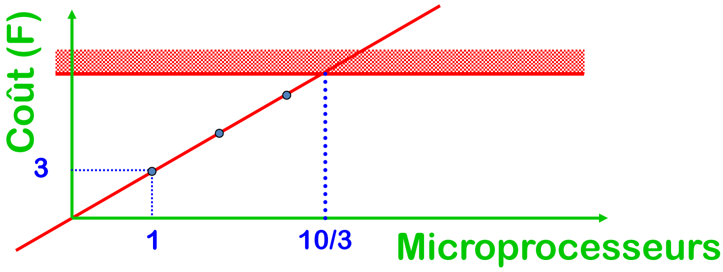


Approche intuitive

- Observations :
  - Problème impossible
  - Contraintes incompatibles
- Commentaire :
  - La solution peut ne pas exister. On dit que le problème ne possède pas de solution admissible.

Approche intuitive

4. *Un laboratoire achète 3F un microprocesseur. Il dispose d'un budget de 10F. Quelle quantité maximale peut-il acheter ?*

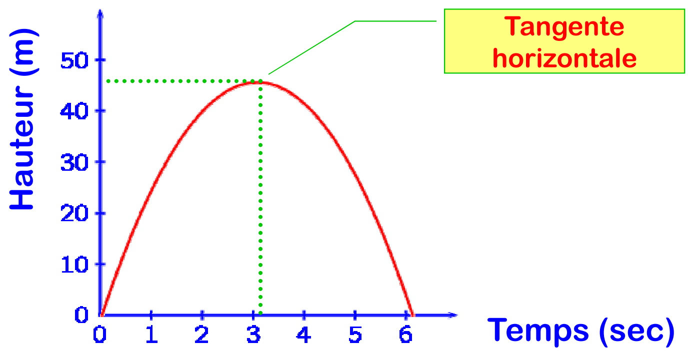


Approche intuitive

- Observations :
  - Impossible d'acheter des parties de microprocesseurs
  - Malgré que la fonction objectif et les contraintes soient linéaires, le budget ne sera pas totalement dépensé
- Commentaire :
  - Lorsque les variables sont entières, les résultats théoriques peuvent être différents

Approche intuitive

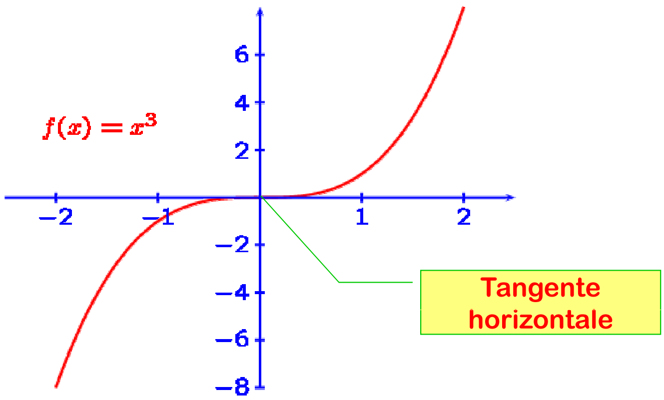
5. *Un objet est lancé à la verticale à la vitesse de 50 m/s. Quand atteindra-t-il son point culminant ?*



Approche intuitive

- Observations
  - Fonction objectif non linéaire
  - Pas de contraintes
  - Solution finie
- Commentaires
  - Si la fonction objectif est non linéaire, une solution finie peut exister, même en l'absence de contraintes
  - A la solution, la tangente à la courbe est horizontale (i.e. la dérivée est nulle)

Approche intuitive

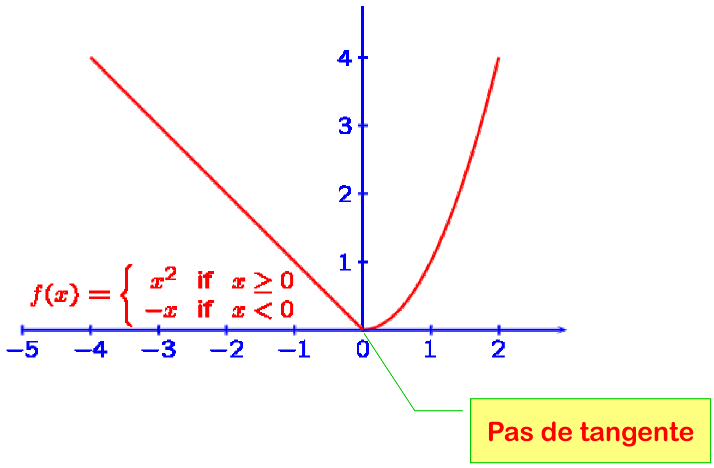


mais pas un maximum, ni un minimum…

Approche intuitive

- Observations
  - Pas de solution finie
  - Présence d'une tangente horizontale
- Commentaires
  - Une solution finie n'est pas garantie par la non linéarité de la fonction objectif
  - Une tangente horizontale n'identifie pas nécessairement une solution.

Approche intuitive



Approche intuitive

- Observation :
  - La fonction n'est pas dérivable à la solution

$$\lim_{\alpha \xrightarrow{<} 0} \frac{f(0+\alpha) - f(0)}{\alpha} = -1$$

$$\lim_{\alpha \xrightarrow{>} 0} \frac{f(0+\alpha) - f(0)}{\alpha} = 0$$

- Commentaire:
  - Attention aux fonctions non différentiables

Approche intuitive

- Le plus haut sommet du monde est l'Everest
- Le plus haut sommet d'Asie est l'Everest
- Le plus haut sommet d'Europe est l'Elbrouz

$$f(x^*) = \max_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$f(y^*) = \max_{x \in Y \subset \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow f(x^*) \leq f(y^*)$$

Types de problèmes

- Linéaire vs. non-linéaire
- Définition:

Une fonction $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $x_1,x_2,\ldots,x_n$ est une fonction linéaire si et seulement s'il existe un ensemble de constantes $c_1,c_2,\ldots,c_n$ telles que

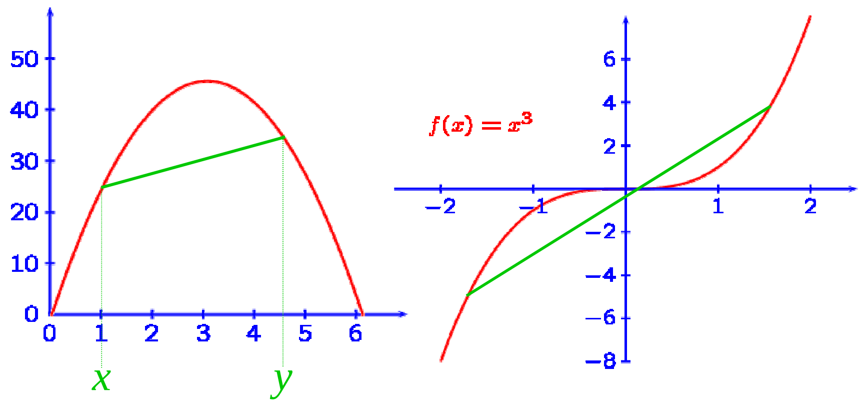
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

- Fonction objectif
- Contraintes

Types de problèmes

- Avec ou sans contraintes
- Dans ce cours :
  - Programmation linéaire
    - Objectif linéaire
    - Contraintes linéaires
  - Programmation non linéaire
    - Objectif non linéaire
    - Sans contraintes

Types de problèmes



f(x) est concave sur X si pour tout x,y∈X, on a

$$f(\alpha x+(1-\alpha y)) \geq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1$$

Types de problèmes

- Résumé des critères
  – linéaire / non-linéaire
  – contraintes / pas de contraintes
  – convexe / non convexe
  – concave / non concave
  – différentiable / non différentiable
  – variables continues / entières

Algorithmes

- Al Khwarizmi, surnom du mathématicien arabe Muhammad Ibn Musa (IXième siècle), né à Khwarizem, en Ouzbekistan.
  – Il a écrit *Al-jabr wa'l muqabala* dont vient le mot « algèbre » [et les équations]
- Algorithme:
  suite finie de règles
  à appliquer dans un ordre déterminé
  à un nombre fini de données
  pour arriver avec certitude,
  en un nombre fini d'étapes,
  à un certain résultat
  et cela indépendamment des données.

- Résolution d'une classe de problèmes

Algorithmes

La plupart des algorithmes considérés dans ce cours auront la forme

- Soit x_0 une estimation de la solution
- Pour k=0,…. faire
  - Trouver x_{k+1} à partir de x_k
- Tant que x_k n'est pas acceptable
- De telle manière que

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$$