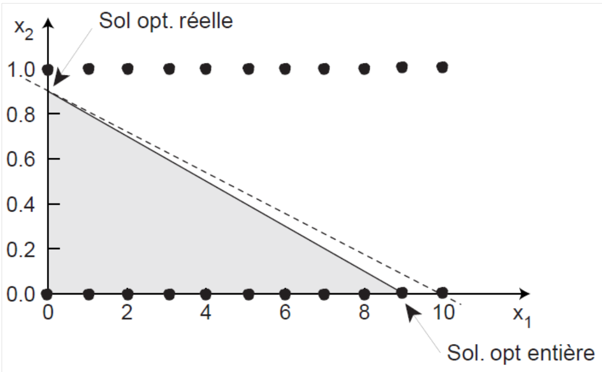
EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

Automne 2013

Corrigé 7

Problème 1

a) La solution optimale du problème est $z^* = \frac{99}{10}$, $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{9}{10}$.



b) Le nouvel optimum est $\bar{z}^* = 9, x_1^* = 9, x_2^* = 0$.

c) Non, il n'est pas possible d'obtenir la solution optimale de (PLE) en arrondissant celle de (PL). Si on arrondit par excès, le point $(0, 1)$ obtenu n'est pas admissible et si on arrondit pas défaut, le point $(0, 0)$ obtenu est admissible mais pas optimal.
De manière générale, la **relaxation linéaire** d'un **programme linéaire en nombres entiers** ne fournit qu'une *borne supérieure* sur la valeur optimale de la fonction objectif du problème. Si on cherche à arrondir la solution optimale du problème relaxé, on se retrouve confronté à deux problèmes :

1. Comment arrondir pour assurer que la solution obtenue soit admissible ?
2. Quelle est l'écart entre la valeur de la solution arrondie et la valeur optimale ?

Il n'existe pas de méthode générale pour le premier problème et le point suivant montre que lorsqu'un arrondi est possible, la qualité de la solution obtenue peut être très mauvaise.

Problème 2

Décrivons tout d'abord les deux phases de la méthode de séparation et d'évaluation.

Évaluation. Pour la phase d'évaluation, on va résoudre la relaxation linéaire du problème, c'est-à-dire le programme linéaire obtenu en remplaçant les contraintes $x_i \in \{0, 1\}$ $\forall i$ par $0 \leq x_i \leq 1$ $\forall i$. Pour résoudre cette relaxation, on va appliquer un algorithme glouton : on considère les objets par ordre décroissant de leur rendement $\rho_i = c_i/a_i$.

Objet i	1	2	3	4
Utilité c_i	13	16	7	4
Poids a_i	6	8	4	3
$\rho_i = c_i/a_i$	$2.1\overline{6}$	2	1.75	$1.\overline{3}$

Ici, on va les considérer dans l'ordre donné.

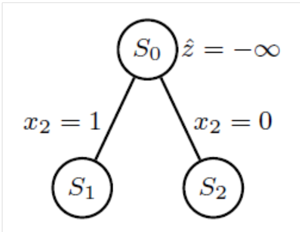
Séparation. Si la solution de la relaxation linéaire n'est pas entière, on crée deux sous-problèmes en posant, dans l'un, $x_j = 1$ et, dans l'autre, $x_j = 0$ où x_j est la variable fractionnaire dans la solution de la relaxation linéaire.

Initialisation. L'arbre d'énumération ne contient que la racine S_0 représentant le problème initial. $\hat{z} = -\infty$.

Première itération. On évalue une borne supérieure $\bar{z}_0$ pour S_0 :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 6/8,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \qquad \bar{z}_0 = 25.$$

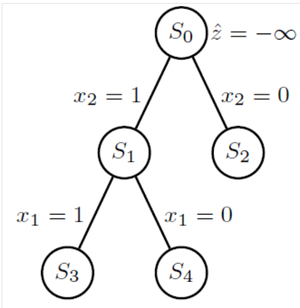
La solution n'est pas entière et $\bar{z}_0 > \hat{z}$. On sépare S_0 en créant deux sous-problèmes, avec respectivement, $x_2 = 1$ et $x_2 = 0$.



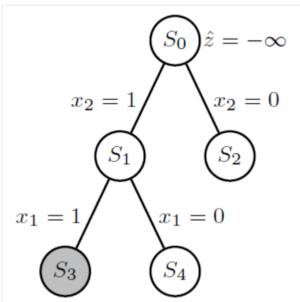
Deuxième itération. On traite le sommet actif S_1, et on évalue une borne supérieure $\bar{z}_1$ pour ce dernier :

$$x_2 = 1 \text{ (fixé)},\ x_1 = 4/6, \qquad \bar{z}_1 = 24.\bar{6}.$$

La solution n'étant pas entière et $\bar{z}_1 > \hat{z}$, on sépare S_1 en «branchant» sur x_1.



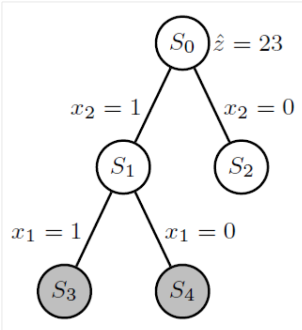
Troisième itération. On traite le sommet actif S_3. On a $x_1 = x_2 = 1$, mais $a_1 + a_2 = 14 > 12 = b$. L'ensemble Ω_3 est vide, et le sommet est sondé.



Quatrième itération. On traite le sommet actif S_4, et on évalue une borne supérieure $\bar{z}_4$ pour ce dernier :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1 \text{ (fixés)},\ x_3 = 1, \qquad \bar{z}_4 = 23.$$

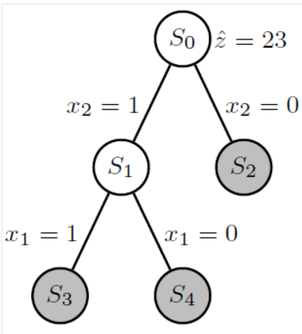
La solution est entière et $\bar{z}_4 > \hat{z}$. On met à jour $\hat{z} = 23$. Le sommet S_4 est sondé.



CINQUIÈME ITÉRATION. On traite le sommet actif S_2, et on évalue une borne supérieure $\bar{z}_2$ pour ce dernier :

$$x_2 = 0 \text{ (fixé)},\ x_1 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2/3 \qquad \bar{z}_2 = 22.\bar{6}.$$

La solution n'est pas entière mais $\bar{z}_2 \leq \hat{z}$, le sommet est sondé.

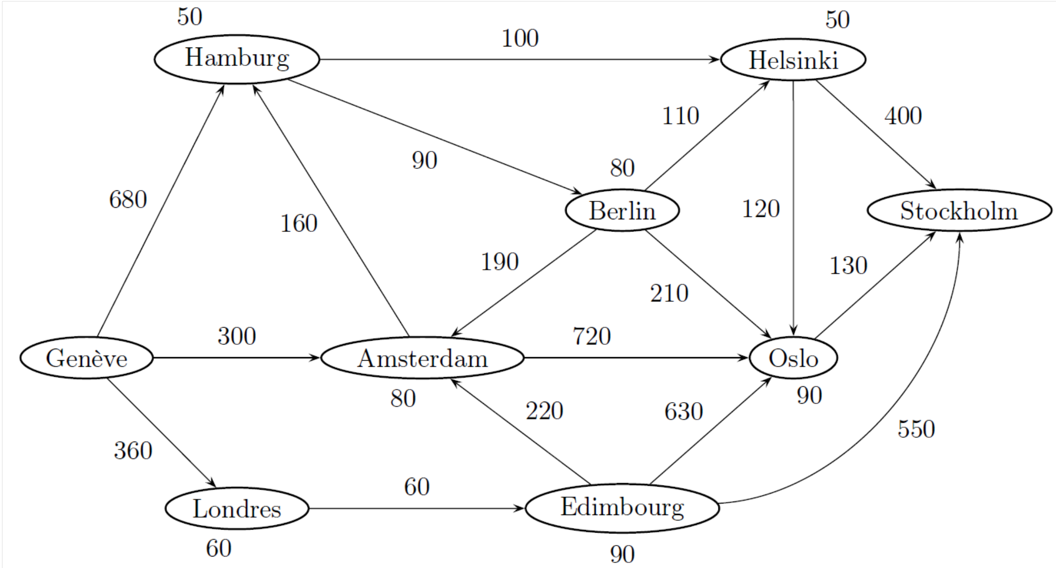


SOLUTION. La solution optimale de ce problème est donc de prendre les objets 2 et 3 pour une valeur de 23.

Problème 3

a) Il s'agit de trouver le plus court chemin au sens du prix à payer de Genève à Stockholm. Comme le fait de passer par une ville suppose que l'on doit y rester une nuit, il faut ajouter le prix de l'hôtel correspondant à chaque arc sortant d'une ville escale. Le nouveau graphe devient :
Les poids des arcs étant tous positifs on applique l'algorithme de Dijkstra, où G, A, B, E, Ha, He, L, O et S sont les initiales des villes :

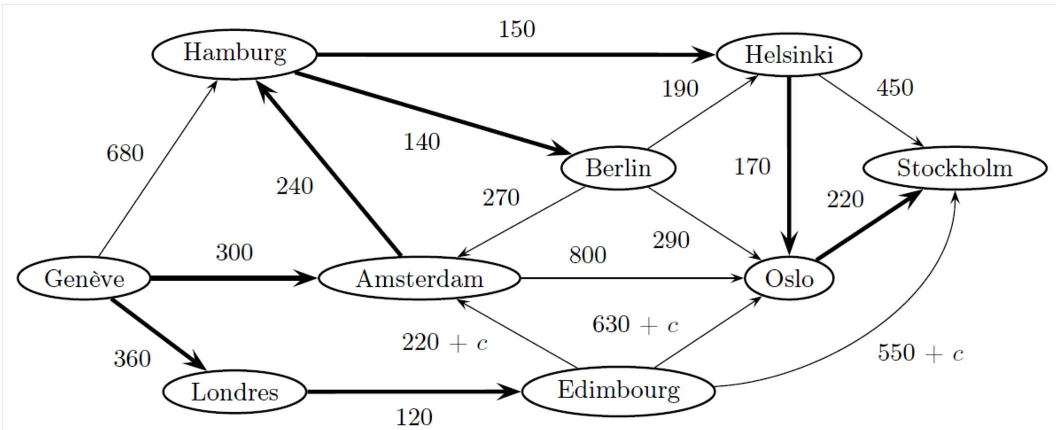
Itér.	i_{min}	Étiquette λ_i/ prédécesseur $p(i)$ à la fin de l'itération								
		G	A	B	E	Ha	He	L	O	S
0		0/-	∞/G	∞/-	∞/-	∞/G	∞/-	∞/G	∞/-	∞/-
1	G	0/-	380/G	∞/-	∞/-	730/G	∞/-	420/G	∞/-	∞/-
2	A		380/G	∞/-	∞/-	590/A	∞/-	420/G	∞/-	∞/-
3	L			∞/-	570/L	590/A	∞/-	420/G	∞/-	∞/-
4	E			∞/-	570/L	590/A	∞/-		1290/E	1120/E
5	Ha			760/Ha		590/A	740/Ha		1290/E	1120/E
6	He			760/Ha			740/Ha		950/He	1120/E
7	B			760/Ha					950/He	1120/E
8	O								950/He	1080/O
9	S									1080/O



Le plus court chemin entre Genève et Stockholm coûte 1080 Frs. Le chemin optimal est :

$$\textit{Genève} \longrightarrow \textit{Amsterdam} \longrightarrow \textit{Hamburg} \longrightarrow \textit{Helsinki} \longrightarrow \textit{Oslo} \longrightarrow \textit{Stockholm}$$

b) Soit $c \geq 0$ le prix de la chambre à Edimbourg. Le nouveau graphe de travail est représenté ci-dessous où l'arbre optimal du point précédent est représenté en gras :



Le chemin le plus court (*i.e.* le moins cher) pour aller de Genève à Edimbourg a une longueur de $\lambda_E = 480$. Comme $\lambda_E + 630 + c > \lambda_O$ (respectivement $\lambda_E + 220 + c > \lambda_A$) $\forall c \geq 0$, le plus court chemin entre Genève et Oslo (respectivement Amsterdam) ne sera pas modifié. Par contre, on constate que $\lambda_E + 550 + c = 1030 + c \leq \lambda_O = 1080$ si $c \leq 50$. La solution actuelle n'est donc plus optimale pour $c < 50$. Comme $1030 + c$ est de toute façon plus grand que chacun des λ_i excepté pour Stockholm, on en conclut que la seule modification par rapport à la solution actuelle est que l'on choisira d'aller à Stockholm depuis Edimbourg plutôt que depuis Oslo pour autant que $c \leq 50$. La solution optimale est donc donnée par

$$\textit{Genève} \longrightarrow \textit{Londres} \longrightarrow \textit{Edimbourg} \longrightarrow \textit{Stockholm}$$

si $c \leq 50$.

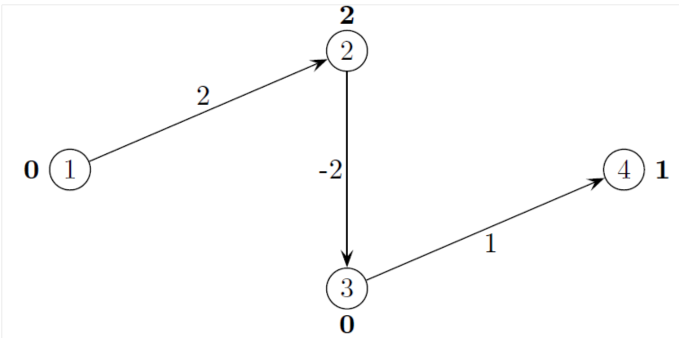
Problème 4

a) Le déroulement de l'algorithme est résumé dans le tableau suivant :

Itération	T	Etiquette (prédécesseur)				Nœud suivant
		1	2	3	4	
1	{1}	0	∞	∞	∞	1
2	{2,3}	0	2 (1)	1 (1)	∞	3
3	{2,4}	0	2 (1)	1 (1)	2 (3)	2
4	{3,4}	0	2 (1)	0 (2)	2 (3)	3
5	{4}	0	2 (1)	0 (2)	1 (3)	4
6	$\emptyset$	0	2 (1)	0 (2)	1 (3)	

b) En effet, le sommet 3 est traité deux fois. Ceci provient du fait qu'une hypothèse sur le réseau n'est pas vérifiée : le poids de l'arc $(2, 3)$ est négatif. On remarque néanmoins que l'algorithme fonctionne correctement et fournit les plus courts chemins depuis 1.

c) L'arbre correspondant aux plus courts cheminx est représenté ci-dessous :



Les étiquettes sur les noeuds représentent les plus courtes distances du noeud 1 jusqu'au noeud courant.

d) Vérifions pour chaque noeud si les conditions sont respectées :

1. $d_1 = 0$
2. $d_2 = 2 \leq d_1 + 2$ et $d_2 = d_1 + 2$
3. $d_3 = 0 \leq d_2 - 2$, $d_3 \leq d_1 + 1$ et $d_3 = d_2 - 2$
4. $d_4 = 1 \leq d_2 + 1$, $d_4 \leq d_3 + 1$ et $d_4 = d_3 + 1$.

Toutes ces conditions sont vérifiées, la solution obtenue est donc optimale.