EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire **Automne 2013**

Corrigé 6

Problème 1

a)
$$\begin{array}{llcl} \min w = & y_1 & & \\ \text{s.c.} & 8y_1 & = & 0 \\ & 3y_1 & = & 2 \\ & y_1 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Sous forme standard, le problème primal s'écrit :

$$\begin{array}{lccccccccc} \min z = & -2y_3 & + & 2y_4 & & & & & & \\ \text{s.c.} & 8y_1 & - & 8y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lccccc} \max w = & 3y_1 & + & 6y_2 & & \\ \text{s.c.} & -3y_1 & + & y_2 & \leq & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Le problème primal du point b) s'écrit aussi

$$\begin{array}{lccc} \min z = & x_1 & & \\ \text{s.c.} & x_1 & \geq & -1 \\ & x_1 & \leq & 6 \\ & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

et sa solution optimale est $x_1^* = 0$ et $z^* = 0$.
Pour le dual, la solution optimale est $y_1^* = y_2^* = 0$ et $w^* = 0$. Nous avons évidemment l'égalité entre z^* et w^*.

Problème 2

1) Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) = & \quad -3x_1 + 2x_2 + \mu_1(x_1 - x_2 - 2) + \mu_2(-x_1 + x_2 + 3) - \mu_3 x_1 - \mu_4 x_2 \\ = & \quad (-3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3)x_1 + (2 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4)x_2 - 2\mu_1 + 3\mu_2. \end{aligned}$$

2) La fonction duale est donnée par :

$$q(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} L(x, \lambda, \mu).$$

Pour que cette fonction soit bornée, il faut que $-3 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0$ et $2 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 = 0$. D'où :

$$q(\lambda, \mu) = -2\mu_1 + 3\mu_2.$$

3) Le problème dual s'écrit :

$$\begin{array}{lccccccccc} \max w = & -2\mu_1 & + & 3\mu_2 & & & & & & \\ \text{s.c.} & -\mu_1 & + & \mu_2 & + & \mu_3 & & & = & -3 \\ & \mu_1 & - & \mu_2 & & & + & \mu_4 & = & 2 \\ & \mu_1 & , & \mu_2 & , & \mu_3 & , & \mu_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Problème 3

a) Programme linéaire primal :

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcr}
\min & z = & 3x_{AC} & + & 4x_{AD} & + & x_{BC} & + & 3x_{BD} & & \\
\text{s.c.} & & x_{AC} & + & x_{AD} & & & & & \leq & 100 \\
 & & & & & & x_{BC} & + & x_{BD} & \leq & 20 \\
 & & -x_{AC} & & & - & x_{BC} & & & \leq & -40 \\
 & & & - & x_{AD} & & & - & x_{BD} & \leq & -80 \\
 & & x_{AC} & , & x_{AD} & , & x_{BC} & , & x_{BD} & \geq & 0
\end{array}
$$

où x_{IJ} est la quantité transportée de I vers J.

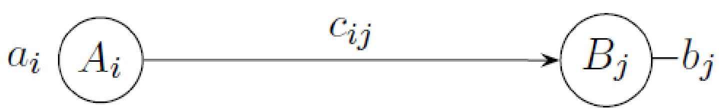
b) Son dual est

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcr}
\max & w = & -100y_A & - & 20y_B & + & 40y_c & + & 80y_D & & \\
\text{s.c.} & & -y_A & & & + & y_C & & & \geq & 3 \\
 & & -y_A & & & & & + & y_D & \geq & 4 \\
 & & & - & y_B & + & y_C & & & \geq & 1 \\
 & & & - & y_B & & & + & y_D & \geq & 3 \\
 & & y_A & , & y_B & , & y_C & , & y_D & \geq & 0
\end{array}
$$

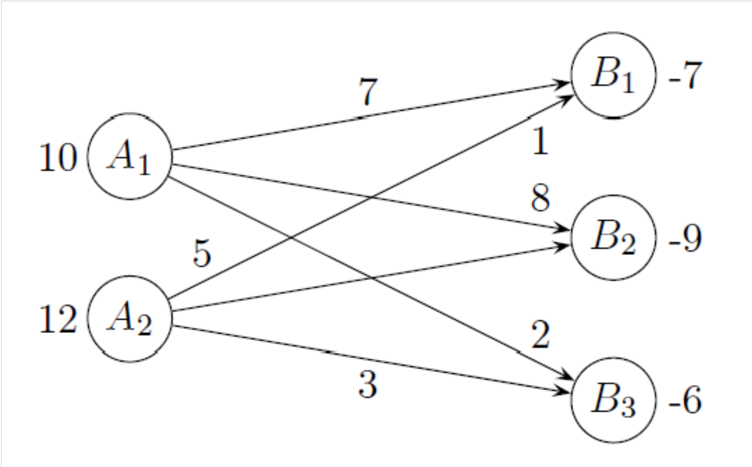
c) Une entreprise de transport T désire travailler avec l'entreprise E en rachetant sa production directement à la sortie des usines A et B selon des prix unitaires y_A et y_B, en acheminant cette marchandise jusqu'aux points de ventes C et D et en la revendant à l'entreprise E selon de nouveaux prix unitaires y_C et y_D respectivement. L'entreprise T cherche à fixer ses prix de manière à maximiser son bénéfice, tout en sachant que pour pouvoir entrer sur le marché, elle doit se montrer concurrentielle par rapport aux coûts de transport auxquels l'entreprise E devait préalablement faire face.

Problème 4

a) On va représenter chaque usine par un sommet et les trajets possibles entre deux usines par un arc :



Pour la donnée de notre problème, on obtient la modélisation suivante :

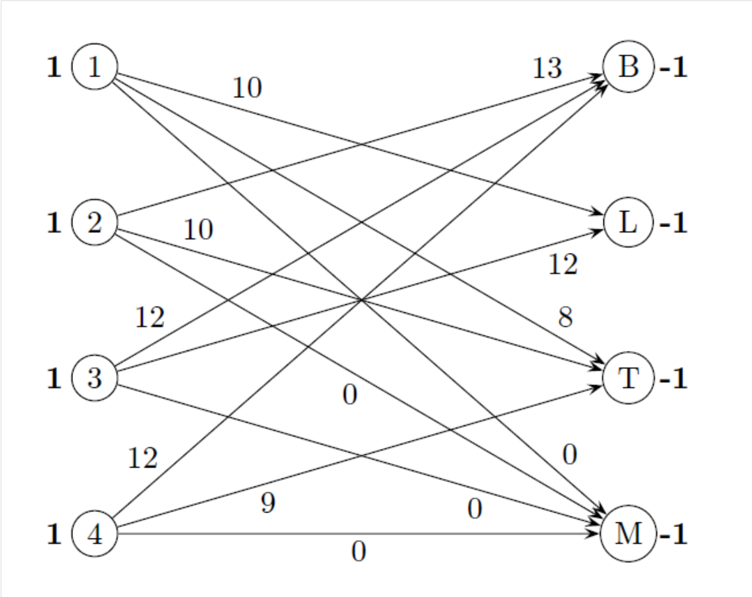


b) Soient les variables x_{ij} = le nombre de pièces qui vont de i à j, pour $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2,3\}$. On peut alors écrire le problème de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lcrcrcrcrcrcrcr}
\text{Min } z & = & 7x_{11} & + & 8x_{12} & + & 2x_{13} & + & 5x_{21} & + & 1x_{22} & + & 3x_{23} & & \\
\text{s.c.} & & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = & 10 \\
 & & & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 12 \\
 & & x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = & 6 \\
 & & & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = & 9 \\
 & & & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & = & 7 \\
 & & x_{11} & , & x_{12} & , & x_{13} & , & x_{21} & , & x_{22} & , & x_{23} & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème 5

Pour modéliser ce problème comme un problème de transbordement, on va représenter chaque journaliste par un sommet numéroté de 1 à 4 et chaque destination par B, pour Burundi, L pour Liberia et T pour Tchétchénie. Chaque sommet journaliste a une offre de 1 et chaque sommet destination une demande de 1. Comme la somme des demandes doit être égale à la somme des offres, et que l'on a 4 journalistes et uniquement 3 destinations, on ajoute une sommet maison M pour y affecter le journaliste qui ne partira pas en reportage. Les coûts des arcs correspondent à la prime de risque demandée par les journalistes pour les différentes destinations. S'ils ne partent pas, ils ne gagent rien. En résolvant le problème de transbordement à coût minimum dans le graphe ci-dessous, on saura comment affecter les journalistes aux différents pays.



Problème 6

Les divergences pour chaque noeud du graphe sont les suivantes : $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = 4$ et $y_4 = 0$.
Comme les divergences ne sont pas toutes nulles, le vecteur de flot dans le réseau ne correspond pas à une circulation.