

---

Serie 2

---

**Problème 1**

Soit la fonction  $f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$  et les points  $\mathbf{a} = (1, 1)$  et  $\mathbf{b} = (-1, 2)$ .

- Calculer  $f(\mathbf{a})$ ,  $f(\mathbf{b})$ ,  $\nabla f(\mathbf{a})$  et  $\nabla f(\mathbf{b})$ .
- Discuter les conditions d'optimalité en  $\mathbf{a}$  et en  $\mathbf{b}$  sur la base des résultats obtenus en a).
- La direction  $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  est-elle une direction de descente en  $\mathbf{b}$ ? Justifier.

**Problème 2**

Pour les deux fonctions ci-dessous, déterminer tous les points stationnaires et, pour chacun d'eux, déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum. Justifier en utilisant les conditions d'optimalité.

- $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 4)^2 + x_2^2$
- $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2 - x_1^2$

**Problème 3**

Déterminer le parallélépipède de volume unité et de surface minimale.

*Indication* : Formuler sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire et utiliser ensuite les conditions suffisantes d'optimalité.

**Problème 4**

Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si pour tout couple de points  $(x, y)$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ .

Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  est concave si et seulement si pour tout couple de points  $(x, y)$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ .

Une fonction affine, encore appelée linéaire, est à la fois convexe et concave.

Indiquer si la fonction suivante est convexe ou concave. Justifier votre réponse

-  $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : y(x) = 1 - x^2$

**Problème 5**

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x$$

$$\text{avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = (1 \ 1 \ 1)^T$$

- Trouver l'unique minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}^3$ .
- Calculer la direction de la plus forte descente au point  $x^0 = (0 \ 0 \ 0)^T$

**Problème 6**

Considérer la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1 + x_2}$$

- Est-ce que  $x_0 = (0, 0)^T$  est un minimum local de la fonction  $f$  ? Justifier.
- Si oui, est-ce aussi un minimum global ? Si non, trouver une direction de descente pour  $f$  en  $x_0$ .

### Problème 7

Soit la fonction

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$$

et les points

$$(x, y) = \{ (2, 2), (-1, 1), (0, -1) \}$$

1. Ces points sont-ils des minimums locaux ?
2. Appliquer deux itérations de la méthode de Newton locale à chacun de ces points.

### Problème 8

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Montrer que, indépendamment du point de départ, la méthode de Newton locale appliquée à cette fonction converge en une seule itération.