Corrigé 2

Problème 1

a)

$$
\begin{aligned}
f(a) &= f((1,1)) = 0 \\
f(b) &= f((-1,2)) = 100(2-1)^2 + (1-(-1))^2 \\
&= 100+4 = 104 \\
\frac{\delta f}{\delta x_1} &= 200(x_2 - x_1^2)\cdot(-2x_1) - 2(1-x_1) \\
&= -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1-x_1) \\
\frac{\delta f}{\delta x_2} &= 200(x_2 - x_1^2) \\
\nabla f &= \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} \\ \frac{\delta f}{\delta x_2} \end{pmatrix} \\
\nabla f(a) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\nabla f(b) &= \begin{pmatrix} 396 \\ 200 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) $\nabla f(a) = 0 \Rightarrow a$ peut être un point extreme.
$\nabla f(b) \neq 0 \Rightarrow b$ ne peut pas être un point extreme.

c)

$$
\begin{aligned}
d &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\nabla f(b)^T \cdot d &= \begin{pmatrix} 396 & 200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 792 - 200 = 592 > 0
\end{aligned}
$$

Ca veut dire que d est une direction de ascente pas de descente en b.

Problème 2

(a) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient s'écrit :

$$
\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1(x_1^2 - 4) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 \end{cases}
$$

Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \{(-2,0),(0,0),(2,0)\}$. Pour chacun de ces points, déterminons s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point qui n'est ni l'un ni l'autre. Pour cela, nous calculons la matrice Hessienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(3x_1^2 - 4) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- en $(-2, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice étant définie positive, $(-2, 0)$ est un minimum local de f.

- en $(0, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice ayant une valeur propre négative et une valeur propre positive, le point $(0, 0)$ correspond à un point de selle de f.

- en $(2, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice étant définie positive, $(2, 0)$ est un minimum local de f.

Comme $f(-2, 0) = f(2, 0) = 0$ et que f est à valeurs positives, on en déduit que f atteint deux minima globaux en $(-2, 0)$ et en $(2, 0)$.

(b) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1(1 + 2(x_2 - x_1^2)) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_2 - x_1^2) \end{cases}$$

Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$. Déterminons si $(0, 0)$ est un minimum local, un maximum local ou un point qui n'est ni l'un ni l'autre.
Pour cela, nous calculons la matrice Hessienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4x_2 - 2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

En $(0, 0)$, la matrice Hessienne vaut :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ayant une valeur propre négative et une valeur propre positive, le point $(0, 0)$ correspond à un point de selle.

Problème 3

Considérons un parallélépipède P. Notons respectivement x, y et z sa longueur, sa largeur et sa hauteur. La surface de P s'écrit alors :

$$S = 2(xy + xz + yz)$$

Or, P a un volume unité donc $xyz = 1$. Ceci impose que x et y soient non nuls, ce qui permet d'éliminer z dans l'expression de S :

$$S(x,y) = 2(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})$$

Le problème revient donc à minimiser la fonction de deux variables $S(x,y)$ sur l'ensemble $x, y > 0$. Cherchons les points en lesquels $\nabla S = 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2(y - \frac{1}{x^2})$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2(x - \frac{1}{y^2})$$

$\nabla S = 0$ implique donc $x = y = 1$. Si S possède un minimum local, il ne peut donc être qu'en $x = y = 1$. A présent, nous allons déterminer si S admet un minimum local en ce point. Pour cela nous allons utiliser la condition suffisante d'optimalité du second ordre. La matrice Hessienne de S en $(1,1)$ est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique définie positive, ce qui prouve que nous avons bien un minimum local de S en $(1,1)$. S admet donc un seul minimum local en $(1,1)$. Puisque S est continue et qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque (x,y) tend vers la frontière du domaine admissible, ce minimum local est un minimum global.
Le parallélépipède de volume unité a une surface minimale lorsque :

$$x = y = z = 1$$

Problème 4

– $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : y(x) = 1 - x^2$ est concave :
  $\lambda y(x_1) + (1-\lambda)y(x_2) = 1 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2$
  $y(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 1 - \lambda^2 x_1^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2$

  En soustrayant ces deux équations et en factorisant :
  $y(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda y(x_1) - (1-\lambda)y(x_2) = \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$

  Ce dont on déduit que y est concave.

Problème 5

(a) La matrice hessienne de f est donnée par Q pout tout $x \in \mathbb{R}^3$. Q étant une matrice diagonale avec des éléments diagonaux strictement positifs, on en conclut qu'elle est définie positive et que, par conséquent, f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^3$.
L'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$ est donc donné par la solution unique du système d'équations $Qx = -b$ qui peut se réécrire comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ 5x_2 = -1 \\ 25x_3 = -1 \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^* = -1 \\ x_2^* = -\frac{1}{5} \\ x_3^* = -\frac{1}{25} \end{array}\right.$$

L'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$x^* = (x_1^*\ x_2^*\ x_3^*)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

(b) Le gradient de f est donné par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ 5x_2 + 1 \\ 25x_3 + 1 \end{pmatrix} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

La direction de la plus forte pente pour f en x^0 est par définition :

$$d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problème 6

- Le gradient de la fonction est donné par :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 2 + e^{x_1+x_2} \\ -x_1 + 4x_2 + e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}$$

  Au point $x_0 = (0\ 0)$, on trouve donc :

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Le point x_0 ne vérifie pas la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, à savoir $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$. Ce point n'est donc pas un minimum local de f.
- Pour qu'une direction $d = (d_1, d_2)^T$ soit une direction de descente pour f en x_0, il faut que la condition suivante soit vérifiée :

$$\nabla f(x_0)^T d < 0$$

  Cela peut s'écrire :

$$-d_1 + d_2 < 0 \text{ ou encore } d_2 < d_1$$

  Par exemple, $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une direction de descente. Cela correspond à la direction de la plus forte pente $d = -\nabla f(x_0)$.

Problème 7

1. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix}$.

   $\nabla f^2(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$.

   $(2,2)$ n'est pas un minimum car $\nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$(-1,1)$ est un minimum car $\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f^2(-1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ est définie positive.

$(0,-1)$ est un maximum car $\nabla f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla f^2(0,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ est définie négative.

2. $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $x_1 = x_0 - (\nabla^2 f(2,2))^{-1} \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{44} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{11} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

   $x_2 = x_1 - (\nabla^2 f(x_1))^{-1} \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 1.151 \\ 1.025 \end{pmatrix}$.

   La méthode n'est pas applicable aux autres points car $\nabla f(x,y)$ est nul en ces points.

Problème 8

On calcule le gradient :

$$\nabla f(\boldsymbol{x_k}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix},$$

le Hessien :

$$H(\boldsymbol{x_k}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et son inverse :

$$H^{-1}(\boldsymbol{x_k}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On s'aperçoit que l'on a :

$$H^{-1}(\boldsymbol{x_k}) \nabla f(\boldsymbol{x_k}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_k}.$$

Ainsi, quel que soit $\boldsymbol{x_k} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{x_k} - H^{-1}(\boldsymbol{x_k}) \nabla f(\boldsymbol{x_k}) = \boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_k} = (0,0).$$

Ainsi, en une itération et indépendamment du point de départ $\boldsymbol{x_k}$, la méthode de Newton converge vers le minimum de la fonction. On peut montrer que cette propriété est vérifiée pour toute fonction quadratique définie positive.