

---

# Graphes et réseaux

Michel Bierlaire

`michel.bierlaire@epfl.ch`

EPFL - Laboratoire Transport et Mobilité - ENAC

# Réseaux

---

## Réseaux routiers



# Réseaux

## Réseaux de transports en commun



# Réseaux

---

## Réseaux de gaz



# Réseaux

---

## Réseaux d'eau



# Réseaux

---

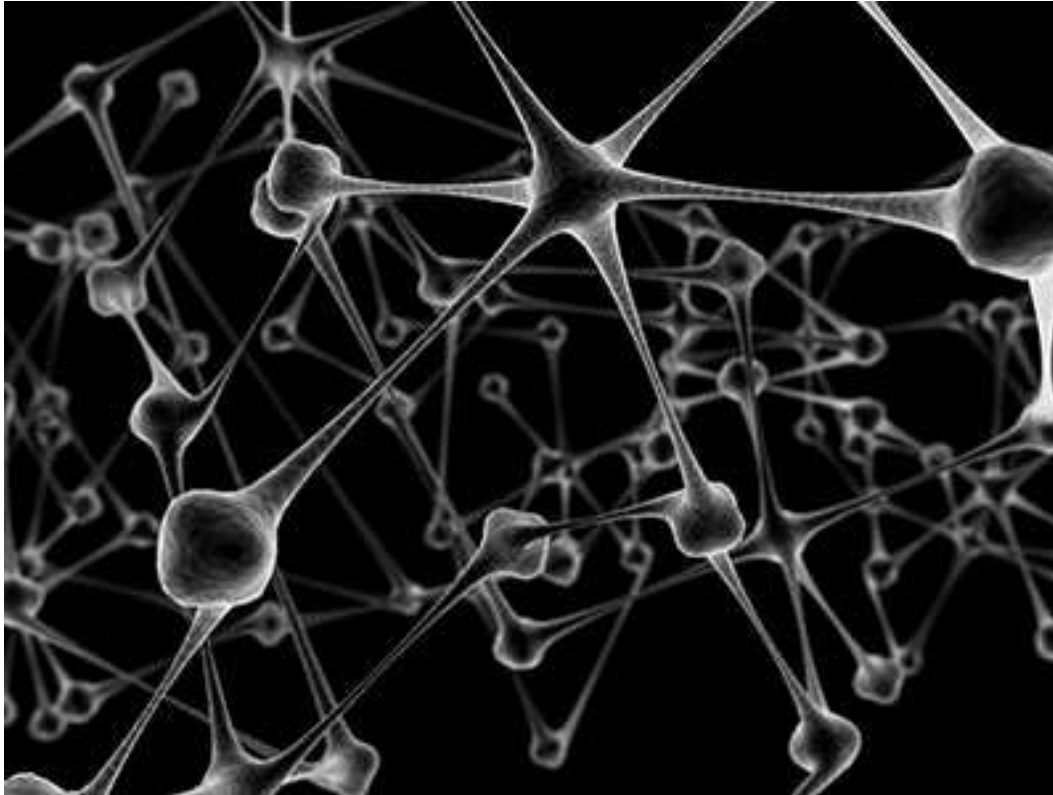
## Réseaux d'ordinateurs



# Réseaux

---

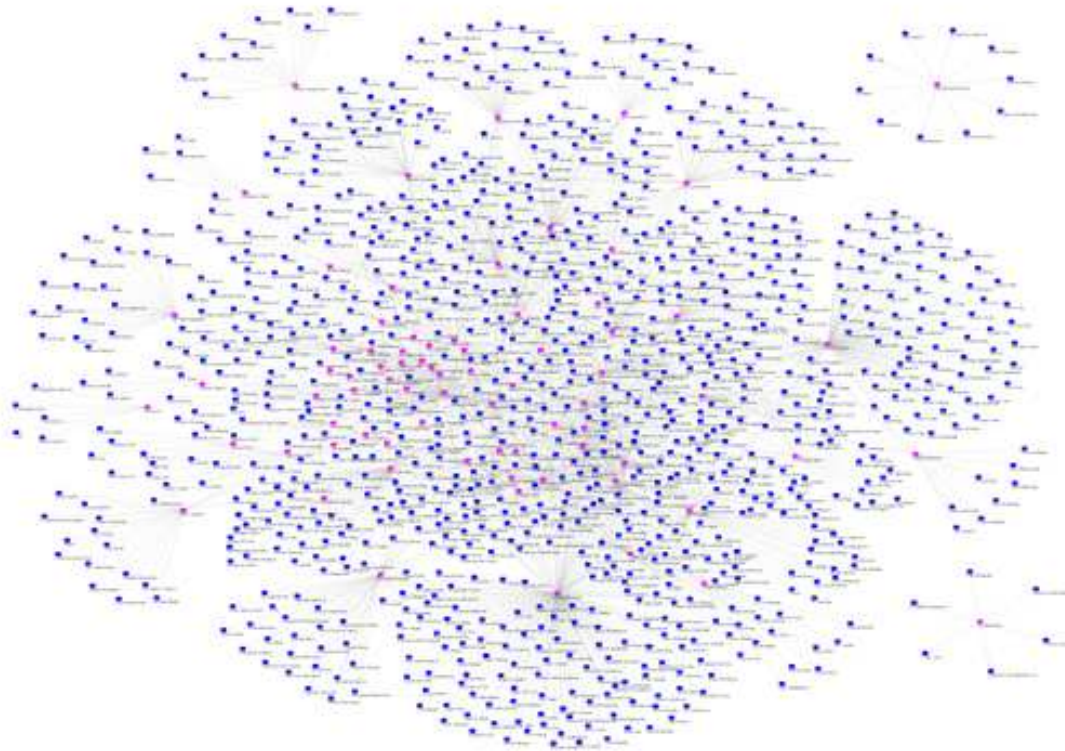
## Réseaux de neurones



# Réseaux

---

## Réseaux sociaux



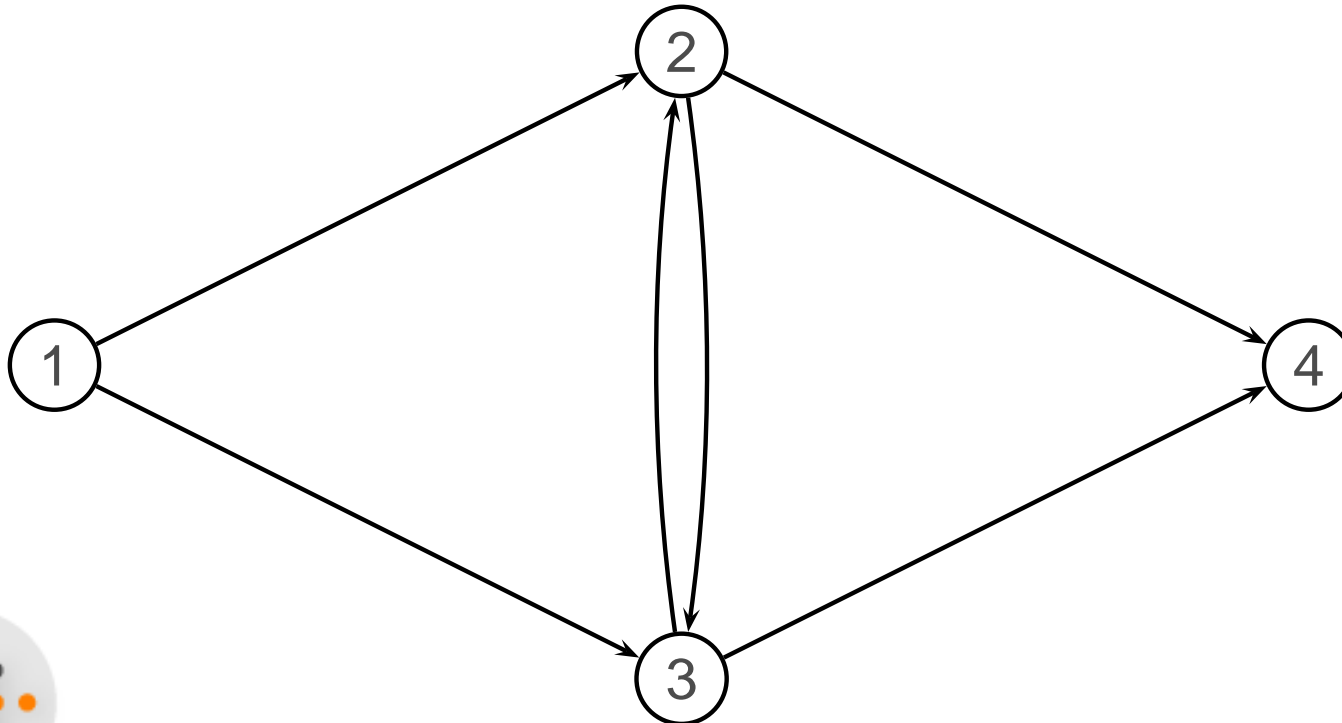


# Réseaux

## Formalisation mathématique du concept de réseaux

### Graphe

Un graphe orienté  $G = (N, A)$  est constitué d'un ensemble  $N$  de noeuds et d'un ensemble  $A$  de paires de noeuds distincts, appelées arcs.



# Réseaux

---

## Arête

*Une arête est un arc dont on ignore l'orientation.*

## Chaîne

*Une suite consécutive d'arêtes est appelée une chaîne.*

## Chemin

*Une suite consécutive d'arcs est appelée un chemin.*

## Graphe connexe

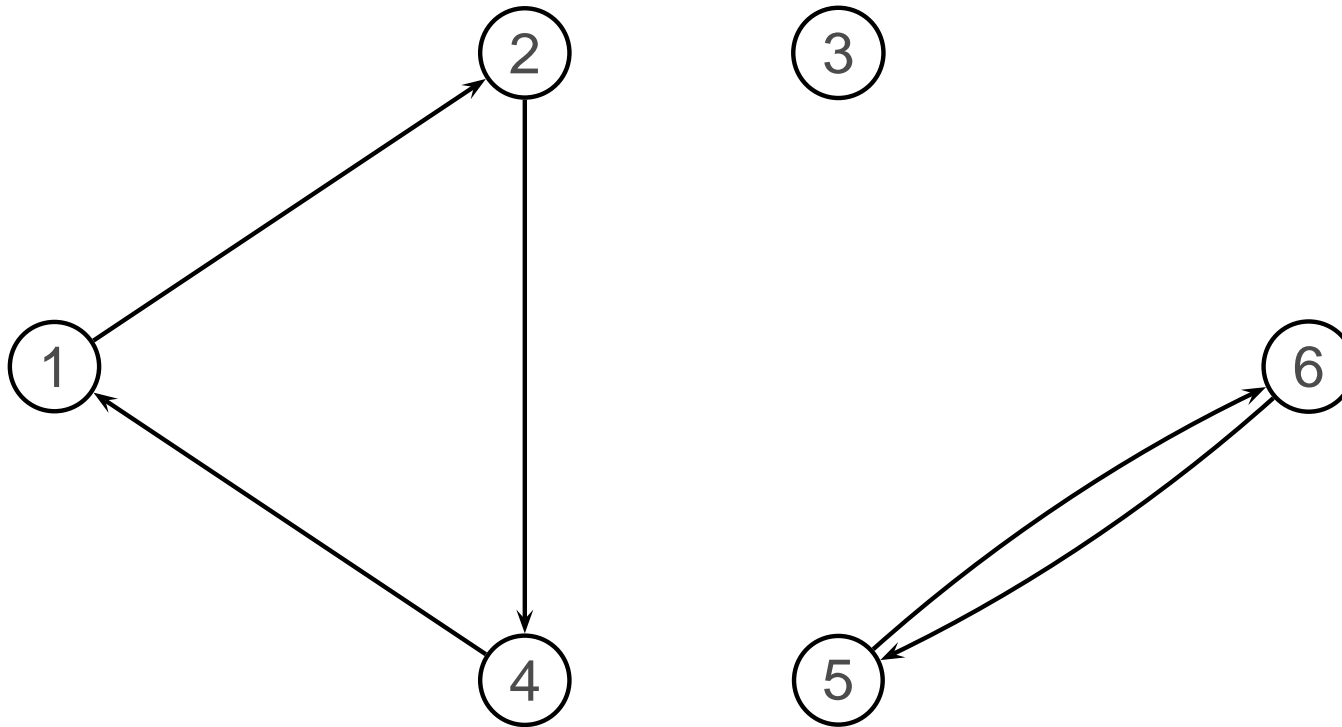
*Un graphe  $G = (N, A)$  est connexe si, quelque soit  $i, j \in N$ , il existe une chaîne de  $i$  à  $j$ .*

## Graphe fortement connexe

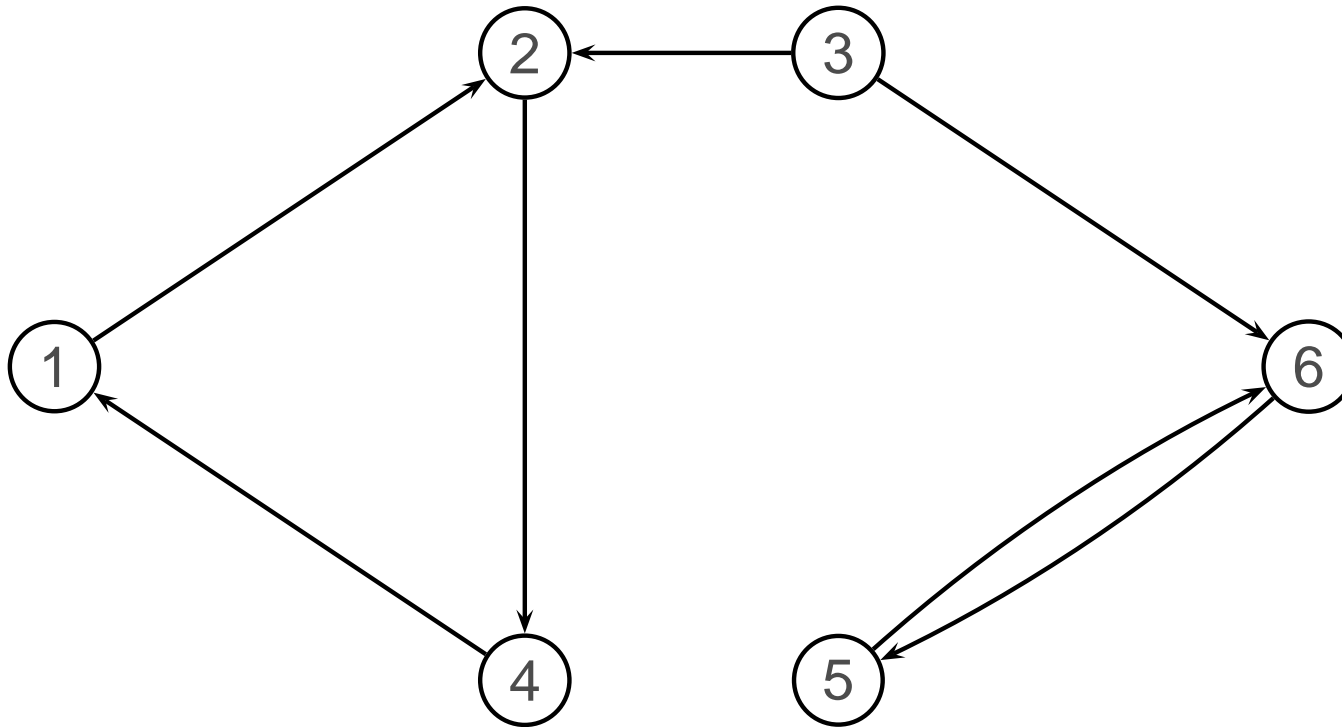
*Un graphe  $G = (N, A)$  est fortement connexe si, quelque soit  $i, j \in N$ , il existe un chemin de  $i$  à  $j$ .*

# Graphe non connexe

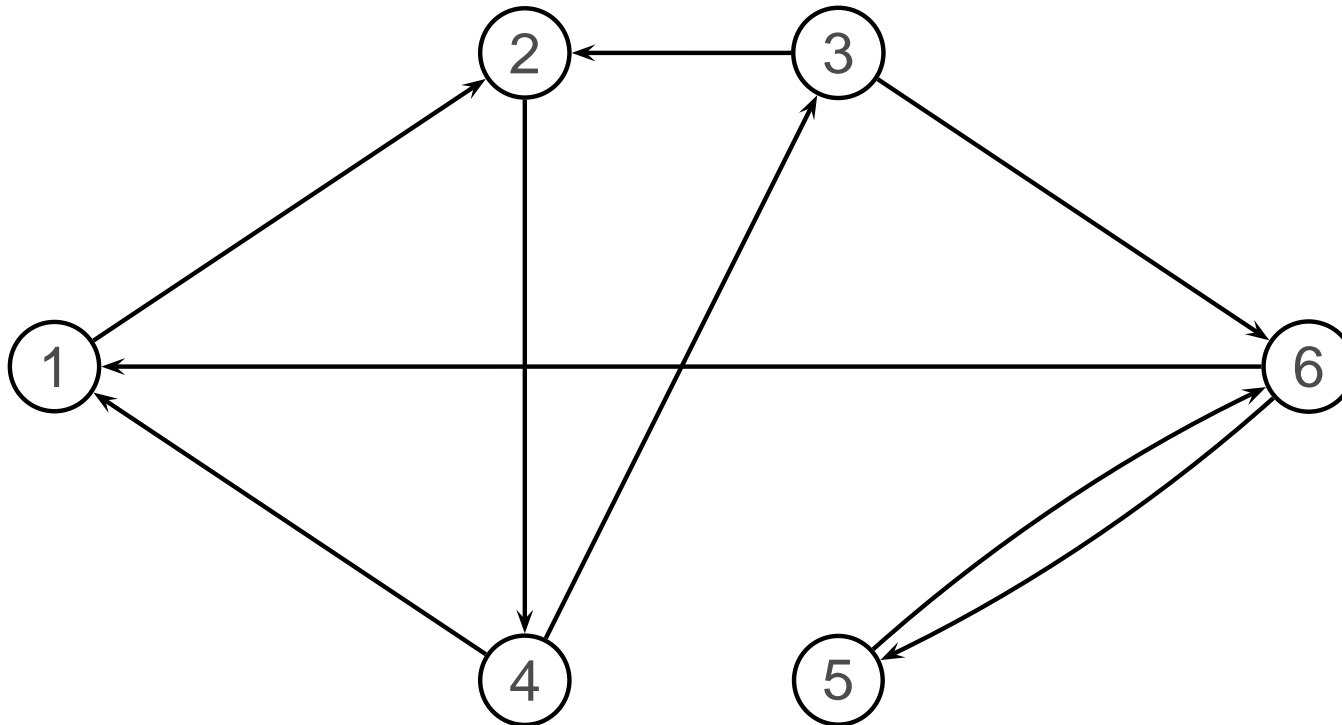
---



# Graphe connexe mais pas fortement



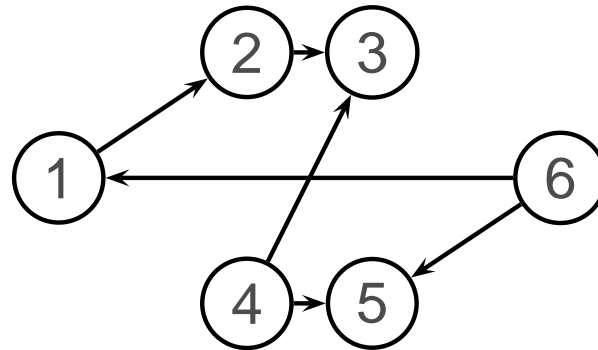
# Graphe fortement connexe



# Réseaux

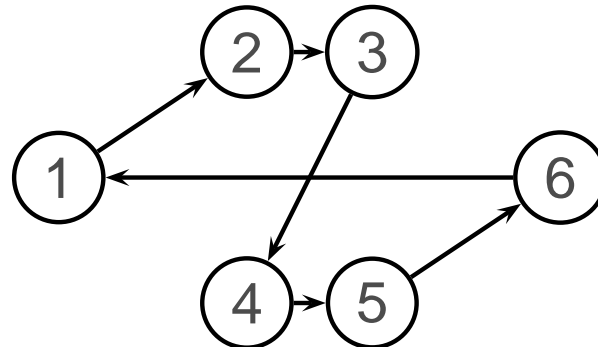
## Cycle

*Une chaîne dont les deux sommets extrémités sont identiques est un cycle.*



## Circuit

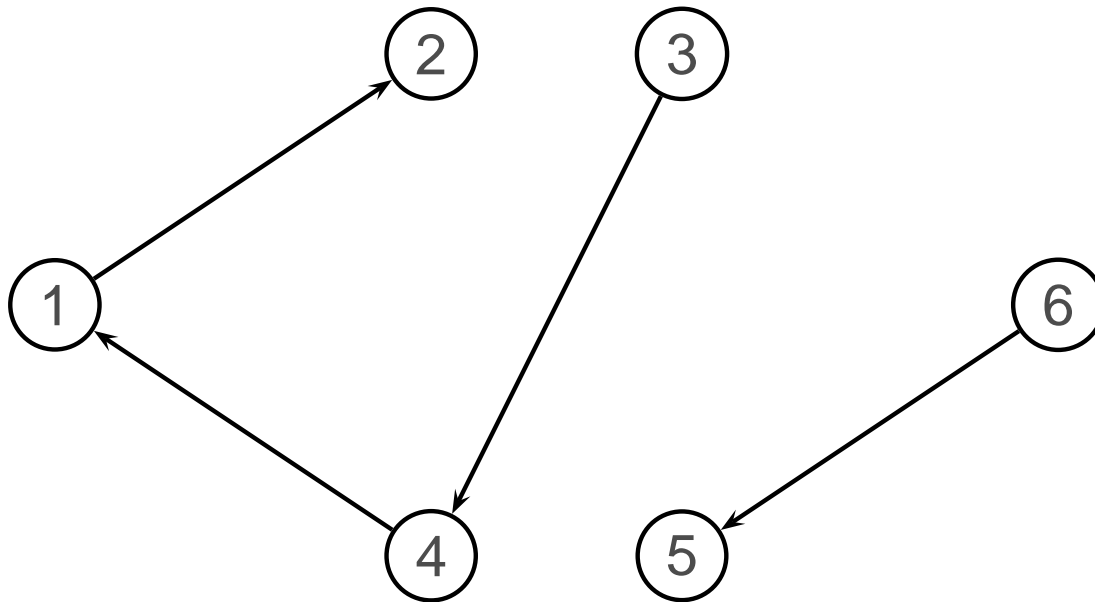
*Un chemin dont les deux sommets extrémités sont identiques est un circuit.*



# Réseaux

## Forêt

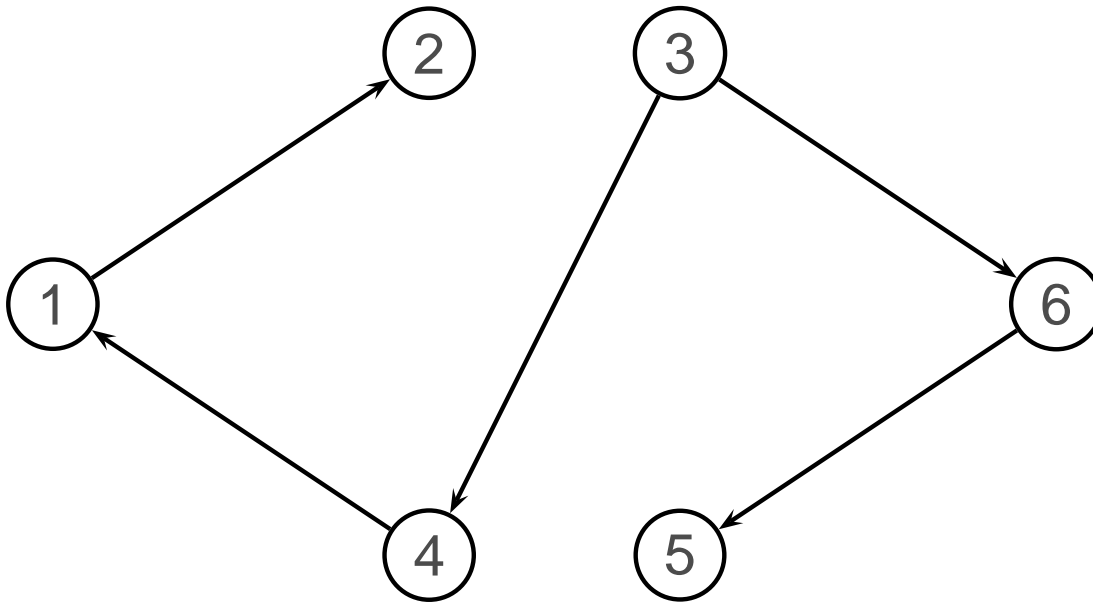
*Un graphe sans cycle est appelé une forêt.*



# Réseaux

## Arbre

*Un graphe connexe sans cycle est appelé un arbre.*





# Réseaux

---

- On supposera qu'il existe au plus un seul arc reliant deux noeuds dans une même direction.
- Dans ce cours, un graphe est un graphe *orienté*.

## Réseau

*Un réseau est un graphe, pour lequel des valeurs numériques ont été associées aux noeuds et/ou aux arcs.*

- Longueur d'une route.
- Capacité d'un tuyau.
- Nombre de personnes habitants en un endroit.
- Flot de véhicules empruntant une autoroute.
- etc.

# Flots

---

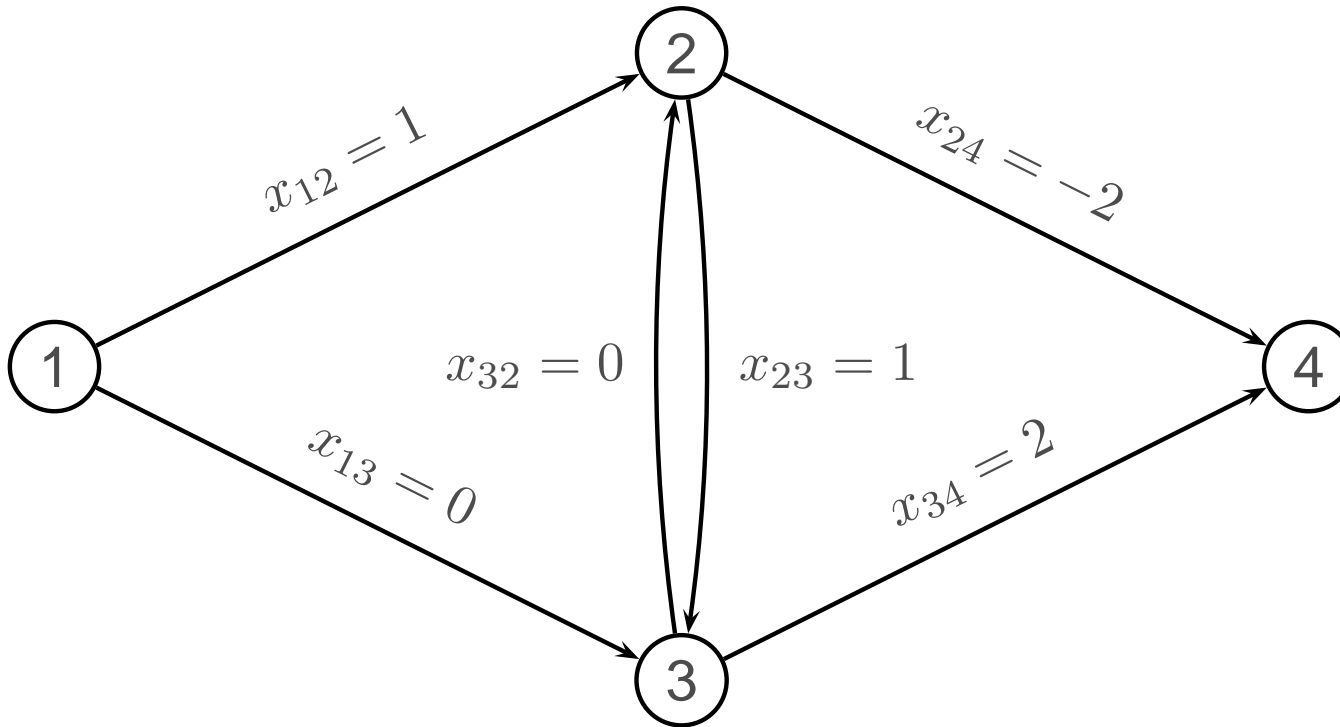
- Notations:
  - Noeuds :  $i$  et  $j$ .
  - Arc :  $(i, j)$ .
  - Flot sur l'arc  $(i, j)$  :  $x_{ij}$ .
  - Si  $x_{ij} < 0$ , le flot va à contre sens.
- Vecteur de flots:

$$\{x_{ij} \text{ tel que } (i, j) \in A\}.$$

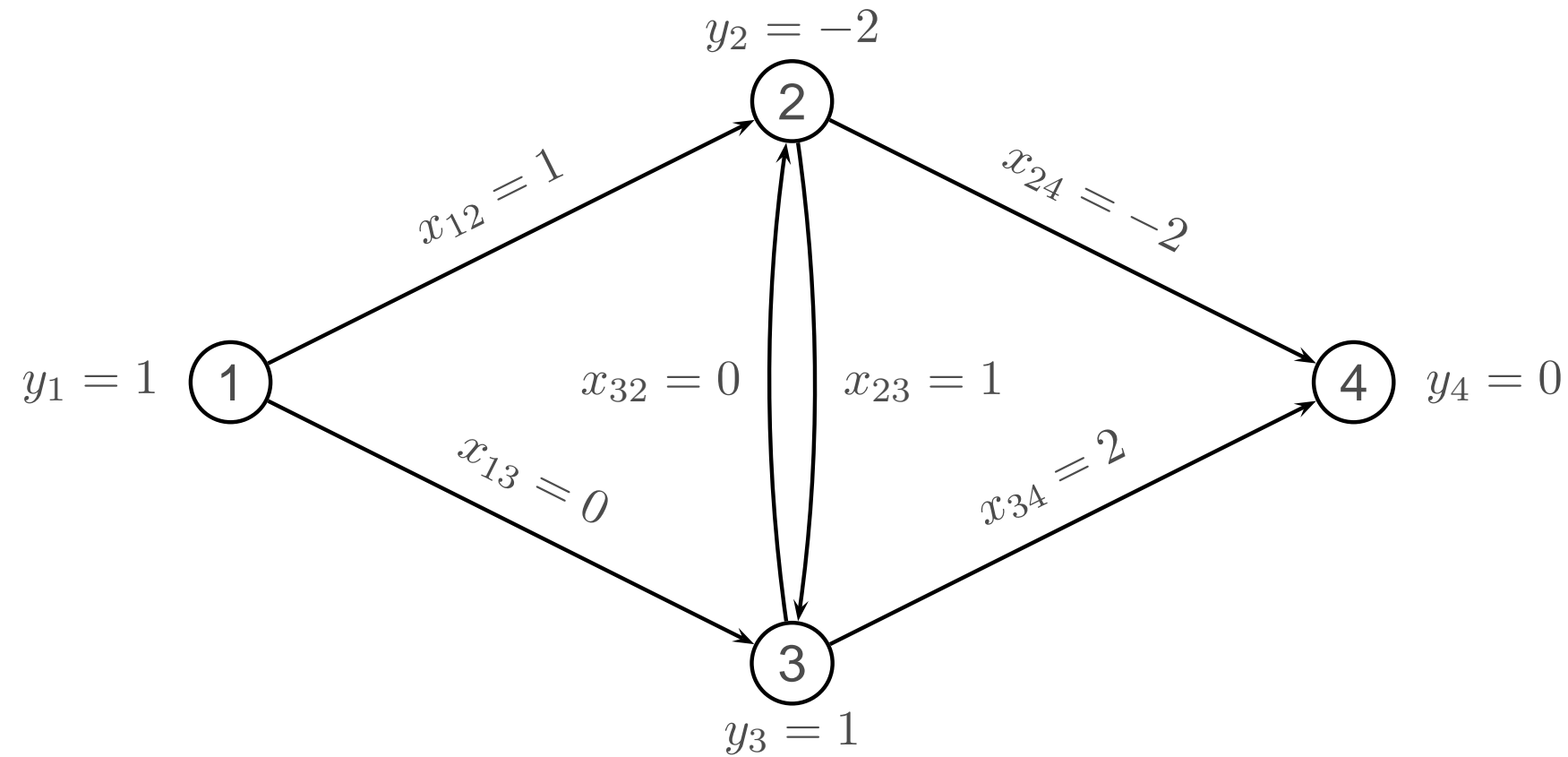
- Divergence : bilan des flots en un noeud  $i$

$$y_i = \sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x_{ji}, \quad \forall i \in N.$$

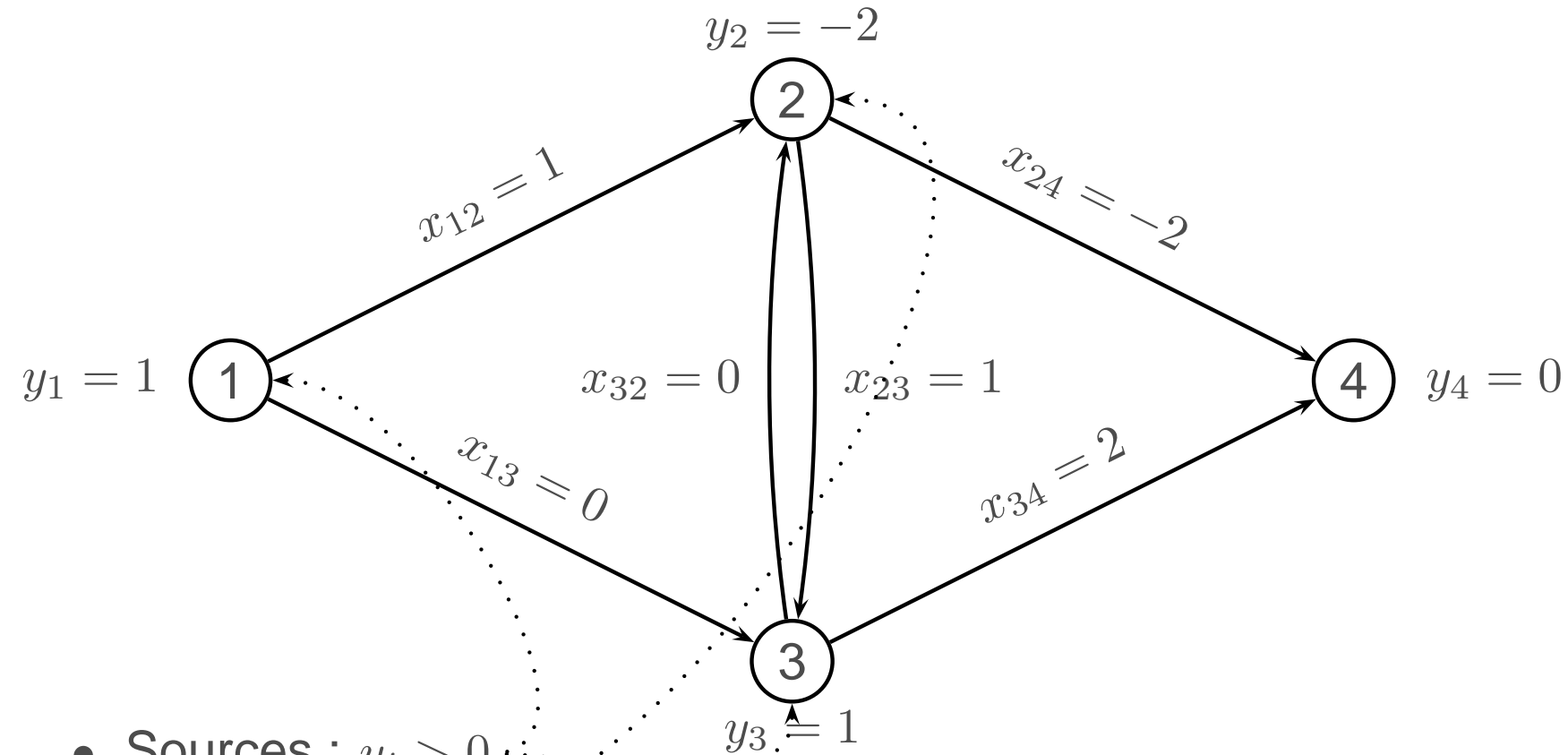
# Flots



# Flots



# Flots



- Sources :  $y_i > 0$
- Puits :  $y_i < 0$

# Flots

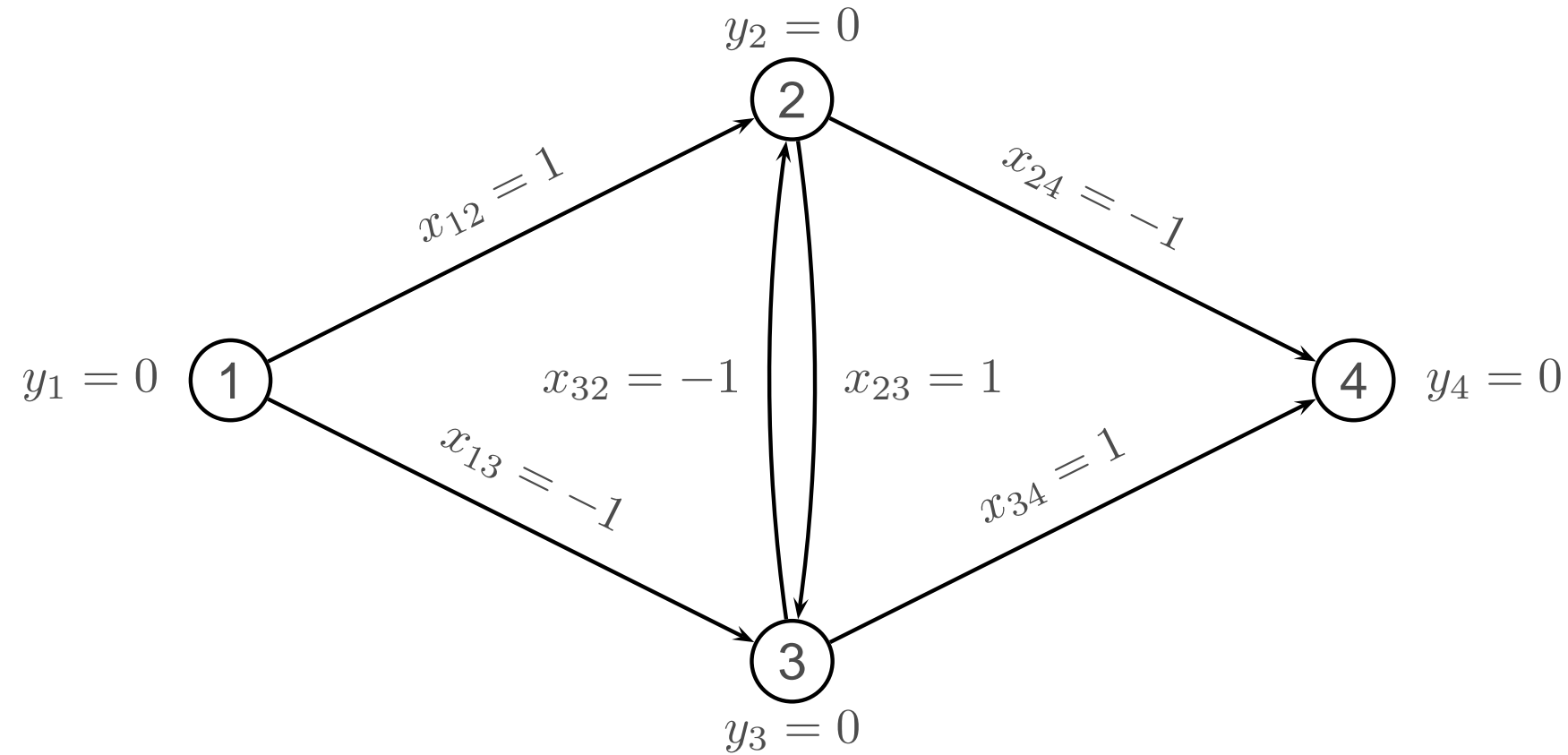
---

- On a toujours

$$\sum_{i \in N} y_i = 0.$$

- Si  $y_i = 0, \forall i \in N$ , on dit que le vecteur de flots est une **circulation**.

# Flots : exemple de circulation



# Problème de transbordement

- Une entreprise doit transporter ses produits de ses usines (lieux de production) vers ses clients.
- Elle désire minimiser ses coûts.
- Elle doit se plier aux contraintes de capacité du système de transport.
- Elle peut éventuellement transborder les marchandises en tout noeud du réseau.





# Problème de transbordement

---

- Trouver un vecteur de flots :
  - qui minimise une fonction de coût (linéaire),
  - qui produise un vecteur de divergence donné,
  - qui vérifie les contraintes de capacité.

# Problème de transbordement

---

## Données

- $a_{ij}$  : coût unitaire de transport sur l'arc  $(i, j)$ ,
- $b_{ij}$  : flot minimum sur l'arc  $(i, j)$  (souvent 0),
- $c_{ij}$  : capacité de l'arc  $(i, j)$ ,
- $s_i$  : divergences désirées.
  - Si  $s_i > 0$  alors  $s_i$  est l'**offre** en  $i$ , c.-à-d. ce qui est produit par l'usine située en  $i$ .
  - Si  $s_i < 0$  alors  $s_i$  est la **demande** en  $i$ , c.-à-d. ce qui est commandé par le client situé en  $i$ .

# Problème de transbordement

$$\min_x \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} x_{ij}$$

sous contraintes

$$\sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x_{ji} = s_i \quad \forall i \in N \quad \text{offre/demande}$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad \text{capacités}$$

# Problème de transbordement

---

- Il s'agit un problème d'optimisation linéaire.
- Il peut donc être résolu par l'algorithme du simplexe.
- Il généralise de nombreux problèmes dans les réseaux.



# Le plus court chemin

---

## Données

- $a_{ij}$  : longueur de l'arc  $(i, j)$ ,
- $b_{ij} : 0$ ,
- $c_{ij} : 1$ ,
- $s_i$  :
  - Origine :  $s_a = 1$ .
  - Destination :  $s_b = -1$ .
  - Autres noeuds :  $s_i = 0$ , si  $i \neq a$  et  $i \neq b$ .

# Affectation

Je possède 4 chefs d'oeuvre que je désire vendre



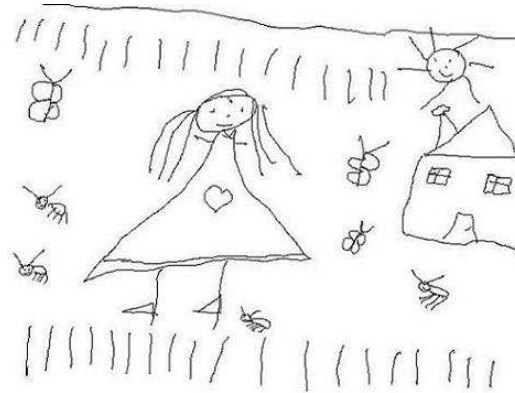
Renoir



Van Gogh



Monet



Bierlaire

# Affectation

J'ai contacté quatre acheteurs qui ont fait des offres (en kCHF)

	Van Gogh	Renoir	Monet	Bierlaire
Christie's	8000	11000	—	—
Drouot	9000	13000	12000	—
COOP	9000	—	11000	0.01
Metropolitan	—	14000	12000	—



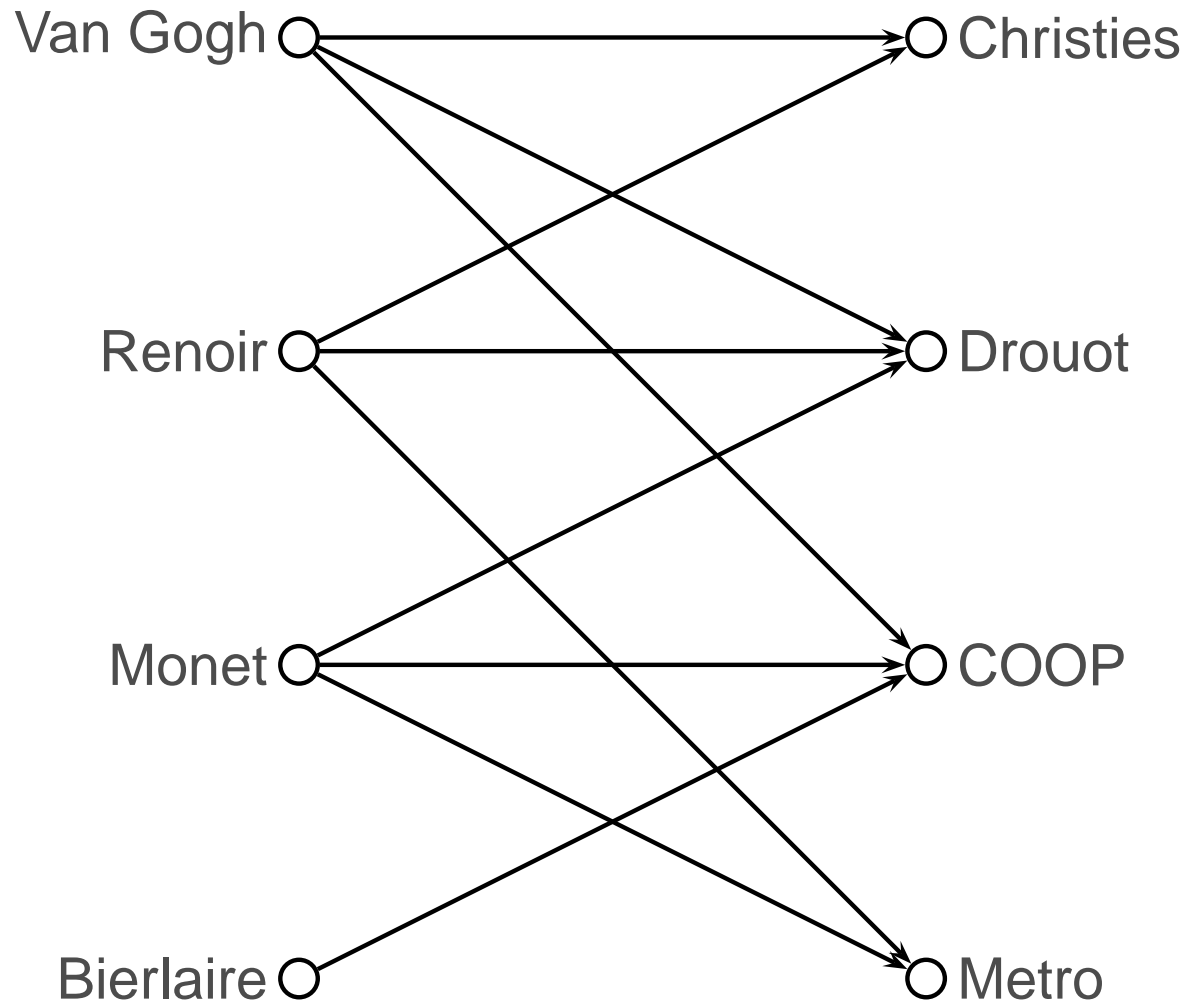
# Affectation

---

- Je désire vendre exactement une peinture à chaque acheteur.
- Quelle peinture dois je vendre à quel acheteur pour gagner un maximum ?
- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Représentation en réseau.

# Affectation

---



# Affectation

---

## Données

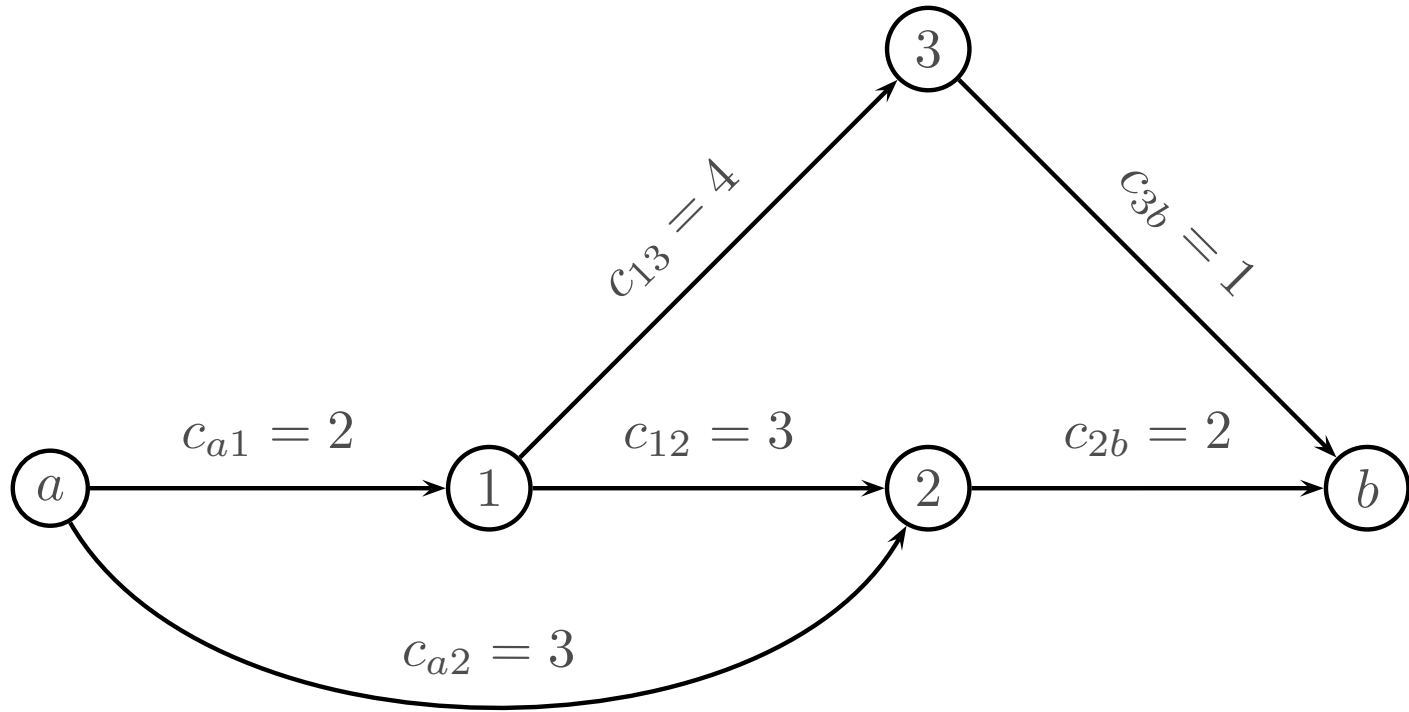
- $a_{ij}$  : valeur de l'offre, changée de signe,
- $b_{ij} : 0,$
- $c_{ij} : 1.$
- $s_i :$ 
  - Noeud  $i$  "oeuvre" :  $s_i = 1.$
  - Noeud  $j$  "acheteur" :  $s_j = -1.$

# Flot maximal

---

- Une société pétrolière désire envoyer un maximum de pétrole via un réseau de pipelines entre un lieu  $a$  et un lieu  $b$ .
- Combien de litres par heure pourra-t-elle faire passer par le réseau ?
- Les capacités des pipelines (en kilolitres/heure) sont indiquées sur les arcs.

# Flot maximal

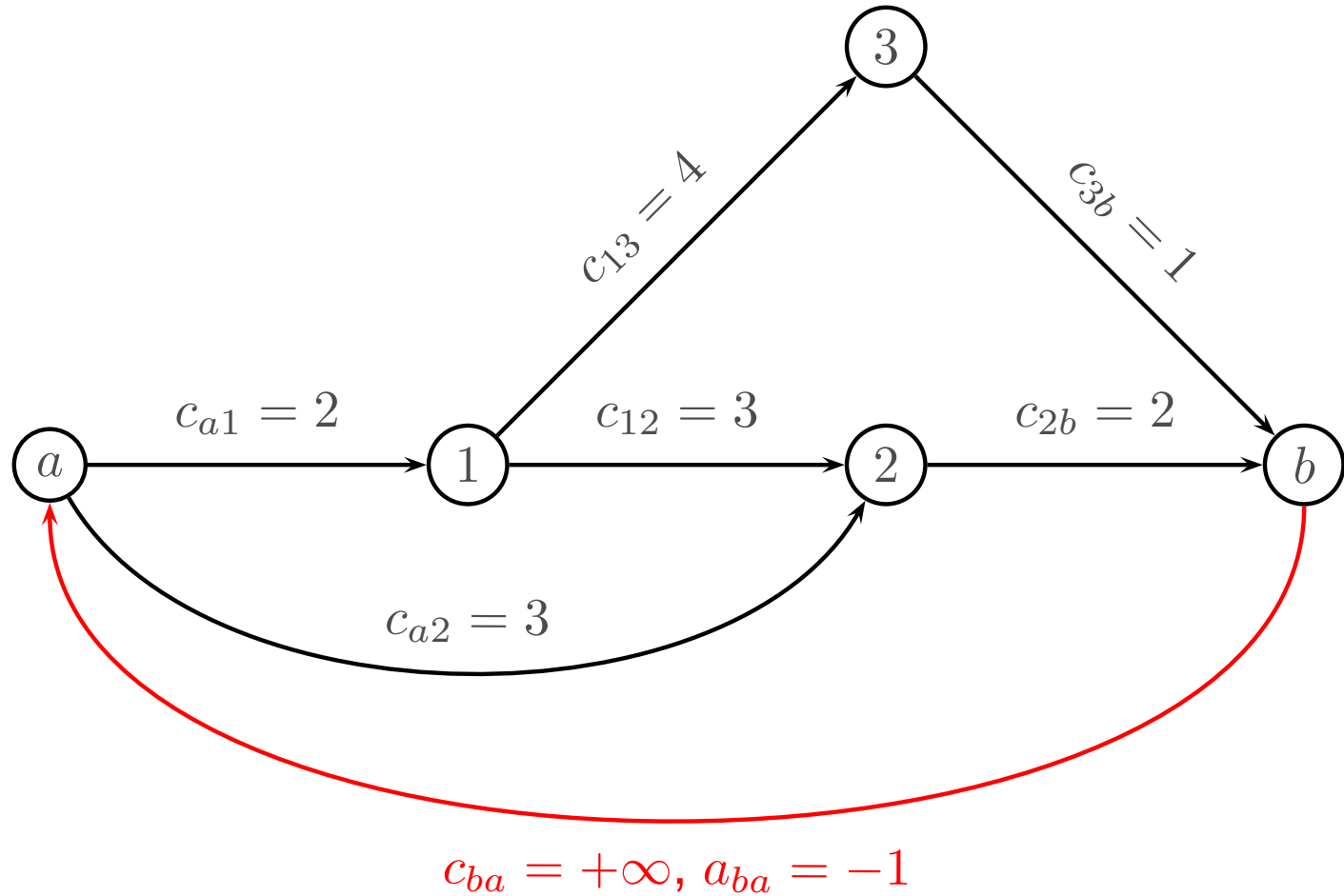


# Flot maximal

---

- On peut le voir comme un problème de transbordement.
- Il faut ajouter un arc artificiel.
- Idée : chaque unité de flot qui a réussi à passer à travers le réseau est ramenée artificiellement à  $a$ , en rapportant des bénéfices (coût négatif).

# Flot maximal



# Flot maximal

---

## Données

- $a_{ij} : \begin{cases} 0 & \text{pour les arc réels} \\ -1 & \text{pour l'arc artificiel} \end{cases}$
- $b_{ij} : 0,$
- $c_{ij} : \text{capacités},$
- $s_i = 0 \forall i: \text{on désire une circulation.}$



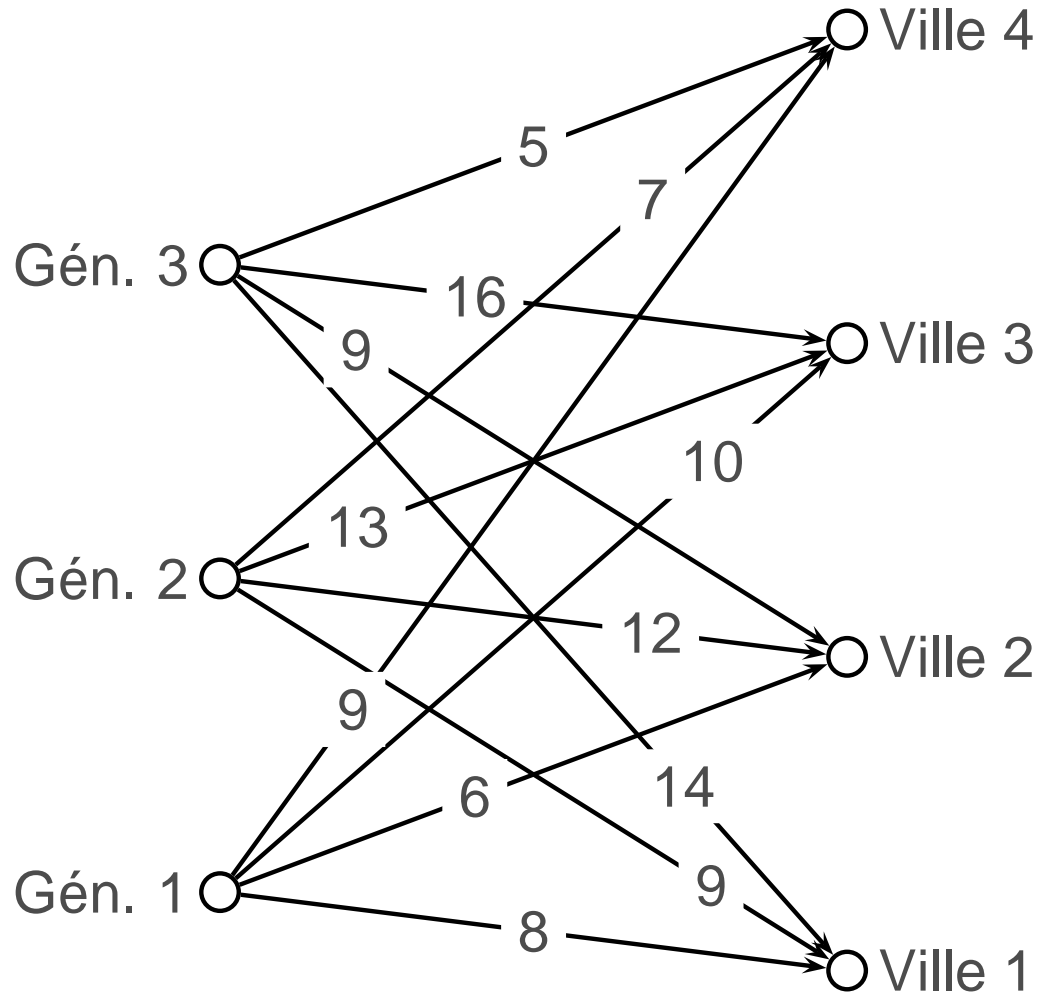
# Problème de transport

- Une société électrique possède trois générateurs pour fournir 4 villes en électricité.
- Les générateurs produisent resp. 35, 50 et 40 GWh.
- Les villes consomment resp. 45, 20, 30 et 30 GWh.
- Les coûts de transport d'un GWh d'un générateur à une ville sont repris dans le tableau suivant.

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Gén. 1	8	6	10	9
Gén. 2	9	12	13	7
Gén. 3	14	9	16	5

- Comment approvisionner les villes à moindre coût ?

# Problème de transport



# Problème de transport

---

## Données

- $a_{ij}$  : prix entre générateur  $i$  et ville  $j$ ,
- $b_{ij} : 0$ ,
- $c_{ij} : +\infty$ ,
- $s_i$ : offre et demande

$$s_i = \begin{cases} \text{capacité de production} & \text{si } i = \text{générateur} \\ -\text{demande} & \text{si } i = \text{ville} \end{cases}$$

# Résumé

---

- Le problème de transbordement généralise beaucoup de problèmes dans les réseaux.
- Il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire.
- L'algorithme du simplexe peut être utilisé.
- Dans de nombreux cas, il est possible d'exploiter mieux la structure du problème afin d'obtenir un algorithme plus efficace.
- Exemple : problème du plus court chemin.