EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2012

SÉRIE D'EXERCICES 2

- Problème-type :
  1.a) 1.c) 2.a)
- Problèmes à résoudre :
  1.b) 2.b) (fonction f) 3)
- Problèmes supplémentaires :
  1.d) 2) (fonction g)

Problème 1

Référence: Bierlaire, M. (2006) *Introduction à l'optimisation différentiable.* Presses Polytechniques et Universitaires romandes. Exercice 2.6 (2.1) p.55

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes ? Lesquelles sont concaves ? Justifier votre réponse.

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = 1 - x^2$

b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = x^2 - 1$

c) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

d) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = x^3$

RAPPEL :

- Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout couple de points (x_1, x_2) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$.
- Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est concave si et seulement si pour tout couple de points (x_1, x_2) et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$.
- Une fonction affine, encore appelée linéaire, est à la fois convexe et concave.

Problème 2

Soient les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^3 - x_1 - x_2 \end{array}$$

a) Calculer le gradient des fonctions f et g pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Calculer la matrice hessienne des fonctions f et g pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Etudier les valeurs pour lesquelles cette matrice est définie positive. Que peut-on en déduire ?

Problème 3

Soit la fonction $f(\boldsymbol{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ et les points $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ et $\boldsymbol{b} = (-1, 2)$.

a) Calculer $f(\boldsymbol{a})$, $f(\boldsymbol{b})$, $\nabla f(\boldsymbol{a})$ et $\nabla f(\boldsymbol{b})$.

b) La direction $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ est-elle une direction de descente en $\boldsymbol{b}$? Justifier.

February 24, 2012 – mbi/fsh