EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2012

corrige 2

Problème 1

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = 1 - x^2$ est concave:
$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = 1 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda) x_2^2$,
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = 1 - \lambda^2 x_1^2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2$.

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2) = \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

Ce dont on déduit que f est concave.

b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = x^2 - 1$ est convexe:
$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2 - 1$,
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 - 1$.

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2) = -\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \leq 0$.

Ce dont on déduit que f est convexe.

c) La fonction $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est convexe.
Il suffit de remarquer que $f(x_1, x_2) = \| (x_1, x_2) \|_2$ où $\| \,.\, \|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après l'inégalité triangulaire et d'après l'homogéneité de la norme pour les scalaires positifs:

$f(\lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2)) \leq \lambda f(x_1, x_2) + (1-\lambda) f(y_1, y_2)$.

d) La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = x^3$ n'est ni convexe, ni concave. En effet, prenons $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$, alors $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = -1$, et:

- Pour $\lambda = \frac{1}{4}$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = -\frac{1}{2}$ et $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = -\frac{1}{8}$,
  donc $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.
- Pour $\lambda = \frac{3}{4}$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \frac{1}{2}$ et $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \frac{1}{8}$,
  donc $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

Problème 2

- Fonction f:
  Le gradient et la matrice hessienne de f sont :

$$\begin{array}{rcll} \nabla g(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 g(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \end{array}.$$

La matrice hessienne est clairement définie positive pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, ce qui traduit la convexité de la fonction f.

- Fonction g:
  Le gradient et la matrice hessienne de g sont :

$$\begin{array}{rcll} \nabla g(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ 3x_2^2 - 1 \end{pmatrix} & \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 g(\boldsymbol{x}) & = & \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix} & \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \end{array}.$$

  La matrice hessienne au point $\boldsymbol{x}^*$ est définie positive si et seulement si $\boldsymbol{x}^* > \mathbf{0}$.

Problème 3

a)

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & f((1,1)) \;=\; 0 \\ f(b) & = & f((-1,2)) \;=\; 100(2-1)^2 \;+\; (1-(-1))^2 \\ & = & 100+4 \;=\; 104 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = & 200(x_2 - x_1^2)\cdot(-2x_1) \;-\; 2(1-x_1) \\ & = & -400(x_2 - x_1^2)x_1 \;-\; 2(1-x_1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = & 200(x_2 - x_1^2) \\ \nabla f & = & \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ \nabla f(a) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla f(b) & = & \begin{pmatrix} 396 \\ 200 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $d^T \nabla f(b) = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 396 \\ 200 \end{pmatrix} = 792 - 200 = 592 > 0.$

Cela signifie que d n'est pas une direction de descente en b.

February 24, 2012 – mbi/fsh