EPFL
ENAC INTER TRANSP-OR
Prof. M. Bierlaire

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
GC/SIE
Printemps 2011

SÉRIE D'EXERCICES 4

- Problème-type :
  1)
- Problèmes à résoudre :
  2)
- Problèmes supplémentaires :
  3)

Problème 1

On considère le problème consistant à minimiser la fonction $f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + x_2^4$, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^2$.

a) Donner $\nabla f(\boldsymbol{x})$.

b) On rappelle la première condition de Wolfe pour le choix d'une longueur de pas α dans une direction de descente $\boldsymbol{d}$:

$$f(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{d}) \leq f(\boldsymbol{x}) + \alpha\beta\nabla f(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{d}, \qquad \beta = 0.1.$$

Soit une itération $x_{k+1} = x_k + \alpha d$ où d est donné par la méthode de la plus forte pente et α par la méthode de recherche linéaire suivante :

- i=0;
- tant que α_i viole la première condition de Wolfe, $\alpha_{i+1} = \lambda \cdot \alpha_i$.

Calculer x_{k+1} en appliquant une itération de cet algorithme avec $x_k = (1, -2)$ et $\alpha_0 = 1$, $\lambda = 0.5$.

c) Même question qu'en b) avec $d = (-1, 2)$.

d) Quelle est la solution optimale de ce problème ?

Problème 2

Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

1) Partant du point $\boldsymbol{x_0} = (9, 1)$, appliquer à f 2 itérations de l'algorithme de la plus forte pente. Pour choisir le pas, on utilisera la première condition de Wolfe avec $\beta = 1/100$. Que deviennent ces itérations si l'on choisit $\beta = 0.5$.

2) Partant du point $\boldsymbol{x_0} = (9, 1)$, effectuer 3 itérations de l'algorithme de Newton. Pour choisir le pas, on utilisera la première condition de Wolfe avec $\beta = 1/100$. Que donnerait la méthode de Newton locale ?

Problème 3

Dans les algorithmes de minimisation présentés ci-dessous, discuter la validité des hypothèses des méthodes de descente vues au cours. Justifier précisément à chaque fois les raisons pour lesquelles l'algorithme rentre ou ne rentre pas dans la catégorie des méthodes de descente vues au cours. La fonction à minimiser $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est toujours deux fois continûment différentiable.

(1) $x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k)$

(2) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$.

(3) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 2\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ 3\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \vdots \\ n\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et α_k vérifie

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq \frac{1}{3}\alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k.$$

(4) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, avec

$$d_k = -(\nabla^2 f(x_k) + \mu I)\nabla f(x_k),$$

μ plus grand que $|\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x_k))|$ et $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$.

(5) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et α_k vérifie

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k.$$

(6) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k d_k$ avec

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

et $\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha f(x_k + \alpha d_k)$.

March 4, 2011 – mbi/mfe