

---

corrigé 2

---

**Problème 1**

a)  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = 1 - x^2$  est concave:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = 1 - \lambda x_1^2 - (1 - \lambda)x_2^2,$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = 1 - \lambda^2 x_1^2 - (1 - \lambda)^2 x_2^2 - 2\lambda(1 - \lambda)x_1 x_2.$$

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1 - \lambda)f(x_2) = \lambda(1 - \lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Ce dont on déduit que  $f$  est concave.

b)  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = x^2 - 1$  est convexe:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2 - 1,$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda^2 x_1^2 + (1 - \lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x_1 x_2 - 1.$$

En soustrayant ces deux équations et en factorisant:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - \lambda f(x_1) - (1 - \lambda)f(x_2) = -\lambda(1 - \lambda)(x_1 - x_2)^2 \leq 0.$$

Ce dont on déduit que  $f$  est convexe.

c) La fonction  $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  est convexe.

Il suffit de remarquer que  $f(x_1, x_2) = \|(x_1, x_2)\|_2$  où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Donc, d'après l'inégalité triangulaire et d'après l'homogénéité de la norme pour les scalaires positifs:

$$f(\lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(y_1, y_2)) \leq \lambda f(x_1, x_2) + (1 - \lambda)f(y_1, y_2).$$

d) La fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : f(x) = x^3$  n'est ni convexe, ni concave. En effet, prenons  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -1$ , alors  $f(x_1) = 1$  et  $f(x_2) = -1$ , et:

- Pour  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = -\frac{1}{2}$  et  $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = -\frac{1}{8}$ , donc  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ .
- Pour  $\lambda = \frac{3}{4}$ ,  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \frac{1}{2}$  et  $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \frac{1}{8}$ , donc  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ .

**Problème 2**

- Fonction  $f$ :

Le gradient et la matrice hessienne de  $f$  sont :

$$\begin{aligned} \nabla g(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 g(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} .$$

La matrice hessienne est clairement définie positive pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , ce qui traduit la convexité de la fonction  $f$ .

- Fonction  $g$ :

Le gradient et la matrice hessienne de  $g$  sont :

$$\begin{aligned}\nabla g(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} x_1^2 - 1 \\ 3x_2^2 - 1 \end{pmatrix} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \nabla^2 g(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

La matrice hessienne au point  $\mathbf{x}^*$  est définie positive si et seulement si  $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$ .

### Problème 3

a)

$$\begin{aligned}f(a) &= f((1,1)) = 0 \\ f(b) &= f((-1,2)) = 100(2-1)^2 + (1-(-1))^2 \\ &= 100 + 4 = 104 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 200(x_2 - x_1^2) \cdot (-2x_1) - 2(1 - x_1) \\ &= -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 200(x_2 - x_1^2) \\ \nabla f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ \nabla f(a) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla f(b) &= \begin{pmatrix} 396 \\ 200 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b)  $d^T \nabla f(b) = (2 \quad -1) \begin{pmatrix} 396 \\ 200 \end{pmatrix} = 792 - 200 = 592 > 0.$

Cela signifie que  $d$  n'est pas une direction de descente en  $b$ .