Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Nikola Obrenovic, Nourelhouda Dougui

Algorithme du simplexe – corrigé (26 October 2018)

Solution of the question 1:

For a reminder, the tableau structure is :

$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
$c^T - c_B^T B^{-1}A$	$-c_B^T B^{-1}b$

.

For the basic variables x_1 and x_4, we have :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; c_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

First, we are going to calculate $B^{-1}A$:

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Now we are going to calculate $B^{-1}b$:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

The term $c^T - c_B^T B^{-1}A$ is going to be calculated as :

$$\begin{aligned} c^T - c_B^T B^{-1}A &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

The last term to be calculated is $-c_B^T B^{-1}b$:

$$-c_B^T B^{-1}b = -\begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.$$

Finally, we obtain the following tableau :

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	-1	1	0	2
0	2	-1	1	4
0	-3	2	0	4

.

From the tableau, we can see that the basic variables x_1 and x_4 correspond to the basic solution $x_B = (2 \quad 4)^T$. Therefore, $x = (2 \quad 0 \quad 0 \quad 4)^T$.

In the case when there is a large number of variables and constraints, it is not practical to search for the initial tableau in this manner for two reasons. Firstly, calculation of the inverse matrix $\boldsymbol{B}^{-1}$ would take a lot of time. Secondly, not every arbitrarily chosen basis leads to a feasible basic solution. Therefore, the above calculation would have to be repeated multiple times. The following two questions present more practical ways for obtaining the initial starting point and tableau for the simplex algorithm.

Solution de la question 2:

1. Le domaine admissible est représenté en gris sur la Figure 1. La solution optimale correspond au sommet D (9,0). La fonction objective vaut alors -27.

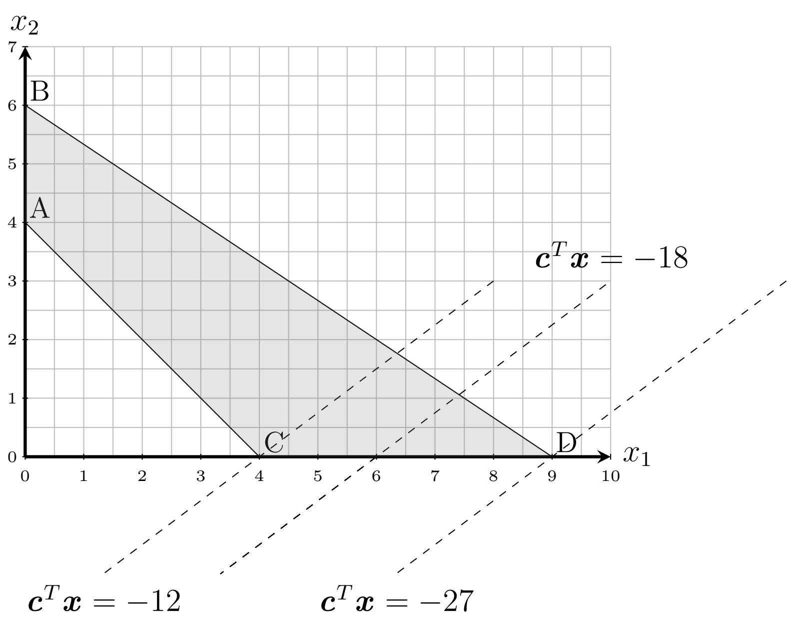

FIGURE 1 – Domaine admissible

2. Pour résoudre le problème en utilisant la méthode du simplexe, on commence par mettre le problème en forme standard. Pour cela, on introduit les variables d'écart e_1 et e_2 :

$$\min -3x_1 + 4x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - e_1 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 &= 18 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

On peut alors identifier la matrice A, le vecteur b et le vecteur c :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avant de commencer à résoudre cette optimisation en utilisant l'algorithme du simplexe, il nous faut trouver une solution de départ. Dans certains cas, il peut être difficile de trouver une solution de base admissible pour démarrer l'algorithme du simplexe. Dans le cas de cet exercice, il n'est pas possible d'utiliser la solution de départ usuelle qui consiste à mettre les variables d'écart en base (d'une part la matrice de base n'est pas la matrice identité et d'autre part $x_1 = x_2 = 0$ n'est pas une solution de base admissible). Il nous faut donc résoudre le problème auxiliaire.

Étape I : problème auxiliaire

Afin de résoudre la première phase du simplexe et de trouver ainsi un premier tableau (une première solution admissible), nous introduisons dans le problème des variables auxiliaires, a_1 et a_2. Le problème auxiliaire a pour objectif d'éliminer ces variables auxiliaires et est défini comme suit :

$$\min a_1 + a_2$$

sous contraintes

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - e_1 + a_1 &= 4 \\
2x_1 + 3x_2 + e_2 + a_2 &= 18 \\
x_1, x_2, e_1, e_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Itération #1

Nous pouvons maintenant facilement créer un tableau initial pour la phase I en choisissant comme variables en base les variables auxiliaires a_1 et a_2. Le tableau initial est donc constitué de 7 colonnes, correspondant aux 4 variables du problème original, plus les deux variables auxiliaires que nous avons ajoutées, plus une dernière colonne qui contiendra la partie droite du tableau. On construit le tableau initial de la manière suivante. Nous recopions d'abord la matrice A pour les colonnes correspondant aux variables du problème original et la partie supérieure du tableau. Nous écrivons la matrice identité dans la partie correspondant aux variables auxiliaires. Effectivement ces variables auxiliaires sont en base, donc les colonnes associées sont les colonnes de la matrice identité. Pour ces colonnes, les valeurs dans la dernière ligne sont 0, puisqu'il s'agit des variables en base. Nous recopions le vecteur b dans la partie droite du tableau. Enfin, le calcul de la dernière ligne du tableau pour les colonnes correspondant aux variables hors base, exploite la structure spécifique de cette première phase du tableau du simplexe. Pour la calculer nous faisons la somme des différentes lignes (c-à-d les différentes éléments de la colonne) du tableau et nous changons le résultat de signe. Finalement, notons que la valeur sur la dernière ligne et la dernière colonne, qui correspond à l'opposé de la somme des éléments du vecteur $\boldsymbol{b}$, contient l'opposé de la valeur de la fonction objectif.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
a_1	$\boldsymbol{A}$				$\boldsymbol{I}_2$		$\boldsymbol{b}$
a_2							
	$-\sum_j \boldsymbol{A}_{i,j}$				0	0	$-\sum_j \boldsymbol{b}_j$

On peut maintenant remplir le tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	2	3	0	1	0	1	18
	-3	-4	1	-1	0	0	-22

Les six premières valeurs sur la dernière ligne correspondent aux coûts réduits. Vous pouvez, bien entendu, vérifier cela en calculant les coûts réduits avec la méthode algébrique. Vous pouvez aussi vérifier que l'opposé de la somme des éléments du vecteur $\boldsymbol{b}$ correspond à l'opposé de la valeur de la fonction objectif.

La prochaine étape consite à choisir quelle variable va rentrer dans la base. Pour cela, on sélectionne les variables auxquelles un coût réduit négatif est associé. Nous avons, ici, le choix entre x_1, x_2 et e_2. La **règle de Bland** stipule que *si on a le choix entre plusieurs variables qui peuvent rentrer dans la base, on choisit celle avec le plus petit indice (c-à-d le plus à gauche dans le tableau)*. On choisit donc x_1 pour rentrer dans la base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
a_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	2	3	0	1	0	1	18
	-3	-4	1	-1	0	0	-22

On peut maintenant calculer les distances correspondants aux variables en base. On a donc que

$$\theta_{a_1} = \frac{4}{1} = 4$$
$$\theta_{a_2} = \frac{18}{2} = 9$$

Le pas maximum est le minimum des deux distances. Il vaut donc 4. De plus, on sait maintenant que x_1 va rentrer dans la base et a_1 va en sortir. On peut aussi calculer la diminution de la fonction objectif qui vaut $\theta_{a_1}\bar{c}_{x_1} = -12$.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
a_1	$\boxed{1}$	1	-1	0	1	0	4
a_2	2	3	0	1	0	1	18
	-3	-4	1	-1	0	0	-22

Il faut bien s'assurer que le pivot (entouré en noir) vaut 1. Si ce n'est pas le cas, il est possible de diviser la ligne par la valeur du pivot afin de se ramener à un pivot de 1. Dans ce cas, il n'y a pas de souci. On peut donc calculer le tableau pour la seconde itération. Pour cela, on utilise la ligne en gris comme étant la ligne de pivot et il va falloir éliminer les autres valeurs dans la colonne en gris. Pour éliminer la valeur au milieu de la colonne, c'est-à-dire 2, il faut prendre cette ligne du milieu et soustraire 2 fois la première ligne. Pour éliminer la valeur du bas de la colonne en gris, il faut ajouter 3 fois la première ligne.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2		
a_1	$\boxed{1}$	1	-1	0	1	0	4	
a_2	2	3	0	1	0	1	18	$-2\times$
	-3	-4	1	-1	0	0	-22	$+3\times$

Itération #2

Le tableau pour la deuxième itération est le suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
x_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	0	1	2	1	-2	1	10
	0	-1	-2	-1	3	0	-10

On voit que la valeur de la fonction objectif est égale à -10 ce qui équivaut à $-(22-12)$. La réduction de la fonction objectif calculée était donc correcte. Nous devons maintenant continuer l'algorithme en choisissant la prochaine variable qui va rentrer dans la base. On a le choix entre x_2, e_1 et e_2. Par la règle de Bland, on choisit x_2.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
x_1	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	0	1	2	1	-2	1	10
	0	-1	-2	-1	3	0	-10

On peut calculer maintenant les pas afin de savoir quelle variable va sortir de la base.

$$\theta_{x_1} = \frac{4}{1} = 4$$
$$\theta_{a_2} = \frac{10}{1} = 10$$

Le pas maximum est donc de 4. C'est donc la variable x_1 qui va sortir de la base pour laisser sa place à x_2. On peut aussi calculer la diminution de la fonction objectif qui vaut $\theta_{x_1}\bar{c}_{x_2} = -4$.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2		
x_1	1	$\boxed{1}$	-1	0	1	0	4	
a_2	0	1	2	1	-2	1	10	$-1\times$
	0	-1	-2	-1	3	0	-10	$+1\times$

Itération #3

Le tableau pour la troisième itération est le suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
x_2	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	-1	0	3	1	-3	1	6
	1	0	-3	-1	4	0	-6

Nous devons maintenant continuer l'algorithme en choisissant la prochaine variable qui va rentrer dans la base. On a le choix entre e_1 et e_2. Par la règle de Bland, on choisit e_1.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
x_2	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	-1	0	3	1	-3	1	6
	1	0	-3	-1	4	0	-6

On peut calculer maintenant les pas afin de savoir quelle variable va sortir de la base.

$$\theta_{x_2} = \frac{4}{-1} = -4$$
$$\theta_{a_2} = \frac{6}{3} = 2$$

Le pas ne pouvant pas être négatif, le pas maximum vaut 2. C'est donc la variable a_2 qui va sortir de la base pour laisser sa place à e_1. On peut aussi calculer la diminution de la fonction objectif qui vaut $\theta_{a_2}\bar{c}_{e_1} = -6$.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
x_2	1	1	-1	0	1	0	4
a_2	-1	0	$\boxed{3}$	1	-3	1	6
	1	0	-3	-1	4	0	-6

Le pivot vaut cette fois-ci 3. Il faut donc diviser la deuxième ligne par 3 afin d'avoir un pivot valant 1.

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2		
x_2	1	1	-1	0	1	0	4	$+1\times$
a_2	-1/3	0	$\boxed{1}$	1/3	-1	1/3	2	
	1	0	-3	-1	4	0	-6	$+3\times$

Itération #4

Le tableau pour la quatrième itération est le suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	
x_2	2/3	1	0	1/3	0	1/3	6
e_1	-1/3	0	1	1/3	-1	1/3	2
	0	0	0	0	1	1	0

Puisque tous les coûts réduits sont non-négatifs, la solution optimale du problème auxiliaire a été trouvée. La première phase est donc terminée. La solution est la suivante : x_1, e_2, a_1 et a_2 sont hors-base et valent, donc, 0. Les variables en base valent $x_2 = 6$ et $e_1 = 2$. Vous pouvez vérifier que ces deux variables satisfont bien les contraintes du problème sous forme standard. Nous pouvons maintenant passer à la résolution du problème d'optimisation en utilisant la méthode du simplexe et ce point en tant que point initial.

Étape II : problème initial

La construction du tableau lors de la première utilisation est simple puisqu'il suffit de réutiliser le tableau qui a été trouvé lors de l'étape finale du problème auxiliaire. Il faut, bien entendu, enlever les variables auxiliaires pour ce problème.

Itération #1

Le tableau de la première itération est, donc, donné par :

	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_2	2/3	1	0	1/3	6
e_1	-1/3	0	1	1/3	2
	$\bar{c}_{x_1}$	0	0	$\bar{c}_{e_2}$	$-\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{x_B}$

On connait déjà les coûts réduits des variables en base. Mais il faut calculer les coûts réduits des variables hors-base. On voit que la matrice

$\boldsymbol{B}$ est l'idendité. On a donc que $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}_2$:

$$\bar{c}_{x_1} = c_1 - \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_1 = -3 - \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = -\frac{17}{3}$$

$$\bar{c}_{e_2} = c_4 - \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}_4 = 0 - \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}$$

Notez bien que nous avons utilisé la matrice $\boldsymbol{A}$ présente dans le tableau ci-dessus. Notez bien que les vecteurs $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j$ peuvent être lu directement dans la partie supérieure du tableau ci-dessus. On peut aussi calculer la valeur de la fonction objectif :

$$-\boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{x_B} = -\begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -24.$$

Le tableau complet est donc donné par :

	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_2	2/3	1	0	1/3	6
e_1	-1/3	0	1	1/3	2
	-17/3	0	0	-4/3	-24

Toujours en utilisant la règle de Bland, on choisit de faire rentrer x_1 dans la base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_2	2/3	1	0	1/3	6
e_1	-1/3	0	1	1/3	2
	-17/3	0	0	-4/3	-24

On peut calculer maintenant les pas afin de savoir quelle variable va sortir de la base.

$$\theta_{x_2} = \frac{6}{2/3} = 9$$

$$\theta_{e_1} = \frac{2}{-1/3} = -6$$

Le pas maximum est 9. On va donc faire rentrer la variable x_1 dans la base et faire sortir la variable x_2. On peut aussi calculer la diminution de la fonction objectif qui vaut $\theta_{x_2}\bar{c}_{x_1} = -51$.

	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_2	$\boxed{2/3}$	1	0	1/3	6
e_1	-1/3	0	1	1/3	2
	-17/3	0	0	-4/3	-24

Comme le pivot n'est pas égal à 1, il faut multiplier la première ligne par 3/2.

	x_1	x_2	e_1	e_2		
x_2	$\boxed{1}$	3/2	0	1/2	9	
e_1	-1/3	0	1	1/3	2	$+1/3\times$
	-17/3	0	0	-4/3	-24	$+17/3\times$

Itération #2

La tableau de la deuxième itération est, donc, donné par :

	x_1	x_2	e_1	e_2	
x_1	1	3/2	0	1/2	9
e_1	0	1/2	1	1/2	5
	0	17/2	0	3/2	27

Puisque tous les coûts réduits sont non-négatifs, la solution optimale du problème initial a été trouvée. La solution est la suivante :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = -27$$

La solution optimale correspond, donc, bien au point D sur la figure 1.

Solution de la question 3:

1. Posons x_1 le nombre de paquets de biscuits sucrés et x_2 le nombre de paquets de biscuits salés.

   Le problème d'optimisation linéaire maximisant les revenus de la vente des biscuits est donné par :

   $$\max 3x_1 + 4x_2$$

   sous contraintes

   $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 50 \\ x_1 &\leq 20 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   En forme standard, on obtient :

   $$\min -3x_1 - 4x_2$$

   sous contraintes

   $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + e_1 &= 50 \\ x_1 + e_2 &= 20 \\ x_2 + e_3 &= 30 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Pour la résolution avec le simplexe, on a deux choix. Soit, on résoud d'abord le problème auxiliaire afin de trouver un point de départ. Soit, on essaye de trouver soi-même une solution de base admissible. Dans le cas de ce problème, on peut facilement trouver une solution de base admissible. On pose que x_1 et x_2 sont hors-base. Nous avons, donc, que e_1, e_2 et e_3 sont en base et valent respectivement 50, 20 et 30. Cette solution vérifie les conditions pour être une solution de base et est bien une solution admissible puisque toutes les valeurs du vecteur $\boldsymbol{x}$ sont non-négatives.

3. On résoud le problème en utilisant le point initial trouvé au point 2. On commence donc directement par le problème initial.

Itération #1

Le tableau initial est donc donné par :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	1	2	1	0	0	50
e_2	1	0	0	1	0	20
e_3	0	1	0	0	1	30
	$\bar{c}_{x_1}$	$\bar{c}_{x_2}$	0	0	0	$-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

On connait déjà les coûts réduits des variables en base. Cependant, il nous faut aussi les valeurs des coûts réduits des variables hors-base. Pour cela, il suffit de recopier le vecteur $\boldsymbol{c}$. En effet, le vecteur $\boldsymbol{c}_B = 0$ de par le choix de la base.

Cependant, il est aussi possible de calculer ces coûts de manière standard. En effet, on voit que la matrice $\boldsymbol{B}$ est l'idendité. On a donc que $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}_3$:

$$\bar{c}_{x_1} = c_1 - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_1 = -3 - \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -3$$

$$\bar{c}_{x_2} = c_2 - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_2 = -4 - \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = -4$$

On peut aussi calculer la valeur de la fonction objectif :

$$-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = -\begin{pmatrix}-3 & -4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\50\\20\\30\end{pmatrix} = 0$$

Le tableau complet est donc donné par :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	1	2	1	0	0	50
e_2	1	0	0	1	0	20
e_3	0	1	0	0	1	30
	-3	-4	0	0	0	0

En utilisant la règle de Bland, on choisit x_1 pour rentrer dans la base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	1	2	1	0	0	50
e_2	1	0	0	1	0	20
e_3	0	1	0	0	1	30
	-3	-4	0	0	0	0

On peut calculer maintenant les pas afin de savoir quelle variable va sortir de la base.

$$\theta_{e_1} = \frac{50}{1} = 50$$
$$\theta_{e_2} = \frac{20}{1} = 20$$
$$\theta_{e_3} = \frac{30}{0} = \infty$$

Le pas maximum vaut donc 20. On va donc faire rentrer la variable x_1 dans la base et faire sortir la variable e_2. On peut aussi calculer la diminution de la fonction objectif qui vaut $\theta_{e_2}\bar{c}_{x_1} = -60$.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3		
e_1	1	2	1	0	0	50	$-1\times$
e_2	$\boxed{1}$	0	0	1	0	20	
e_3	0	1	0	0	1	30	$0\times$
	-3	-4	0	0	0	0	$+3\times$

Itération #2

Le tableau de la deuxième itération est donné par :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	2	1	-1	0	30
x_1	1	0	0	1	0	20
e_3	0	1	0	0	1	30
	0	-4	0	3	0	60

Cette fois-ci, nous avons qu'un seul candidat x_2. Il va donc rentrer dans la base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	2	1	-1	0	30
x_1	1	0	0	1	0	20
e_3	0	1	0	0	1	30
	0	-4	0	3	0	60

On peut calculer maintenant les pas afin de savoir quelle variable va sortir de la base.

$$\theta_{e_1} = \frac{30}{2} = 15$$
$$\theta_{x_1} = \frac{20}{0} = \infty$$
$$\theta_{e_3} = \frac{30}{1} = 30$$

Le pas maximum vaut donc 15. On va donc faire rentrer la variable x_2 dans la base et faire sortir la variable e_1. On peut aussi calculer la diminution de la fonction objectif qui vaut $\theta_{e_1}\bar{c}_{x_2} = -60$.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	$\boxed{2}$	1	-1	0	30
x_1	1	0	0	1	0	20
e_3	0	1	0	0	1	30
	0	-4	0	3	0	60

Étant donné que le pivot ne vaut pas 1, il faut diviser les valeurs de la première ligne par 2.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3		
e_1	0	$\boxed{1}$	1/2	-1/2	0	15	
x_1	1	0	0	1	0	20	$0\times$
e_3	0	1	0	0	1	30	$-1\times$
	0	-4	0	3	0	60	$+4\times$

Itération #3

Le tableau de la troisième itération est donné par :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
x_2	0	1	1/2	-1/2	0	15
x_1	1	0	0	1	0	20
e_3	0	0	-1/2	1/2	1	15
	0	0	2	1	0	120

Puisque tous les coûts réduits sont non-négatifs, la solution optimale du problème a été trouvée. La solution est la suivante :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = -120$$

Solution of the question 4:

First, we will rewrite the problem in the form

$$\min c^T x$$

subject to

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ x &\ge 0, \end{aligned}$$

which is

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} -4x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le -2 \\ -x_1 + x_2 &\le -1 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Since vector b contains the negative elements, we need to solve the auxiliary problem first, i.e. to solve the simplex algorithm in two phases.

Therefore, we further write the problem in standard form, by introducing two slack variables x_3, x_4 :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^4} -4x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \qquad &= -2 \\ -x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

The polyhedron in standard form is

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 | Ax = b, x \ge 0 \right\}$$

with

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

and the vector of costs is

$$c = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

For the Phase I of the simplex algorithm, we need to have $b \geq 0$. Hence, we multiply matrix A and vector b by -1 and get :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Now, we can start the Phase I of the simplex algorithm.

First, the auxiliary problem is written as

$$\min x_1^a + x_2^a$$

subject to

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_1^a \quad &= 2 \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 \quad + x_2^a &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a &\geq 0. \end{aligned}$$

The initial tableau of the auxiliary problem is defined as :

$A\|I$	b
$-p^T A\|0$	$-p^T b$

where A and b are the matrix and vector of the original problem, I is the identity matrix with the size of the auxiliary variables number, and p is a vector of ones of the same size.

Hence, the initial tableau for the auxiliary problem is :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	
-1	1	-1	0	1	0	2
1	-1	0	-1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	-3

We observe that all reduced costs are non negative. However, the optimal solution is not zero. It means that the original problem has no solution. If we take a look at the original problem, we can see that it is infeasible since we can rewrite the constraints as

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 1 + x_2 \\
x_1 &\leq x_2 - 2.
\end{aligned}
$$

That is why the optimal solution of the auxiliary problem is not zero. We can't give zero value to the auxiliary variables without violating the problem constraints.

Solution of the question 5:

In any case, for the tableau to be valid, it must hold that $c = 0$, and that basic variables are x_1, x_3 and x_5. Also, the values of basic variables must be non-negative and hence, $f \geq 0$.

1. Here, we need to discuss two different possibilities : when the solution is non-degenerate, i.e. $f > 0$, and when the solution is degenerate, i.e. $f = 0$. In the former case, if the current base is optimal, the reduced costs of non-basic variables must be non-negative, i.e., $a \geq 0$ and $b \geq 0$. However, in the case of a degenerate solution ($f = 0$), the reduced costs of non-basic variables can also be negative if the corresponding direction is infeasible, i.e. if the tableau coefficient corresponding to the basic variable which is equal to zero, is positive. For x_2, we have $x_3 = f = 0$, but the tableau coefficient is equal to -2, making the direction feasible. Hence, $a \geq 0$ must hold. Following the same reasoning for x_4, it is either $b \geq 0$, or $b < 0$ and $e > 0$. (*For another example, refer to the 3rd question from the previous set of exercises on the simplex algorithm.*)

   The other parameters may take any value.

2. Again, there are two cases depending on the degeneracy of the optimal solution. If it is non-degenerate ($f > 0$), the problem has a unique optimal basic solution if the reduced costs of all non-basic variables are strictly positive, in the final iteration of simplex algorithm, i.e., $a > 0, b > 0$.

If the solution is degenerate ($f = 0$), the conditions for a and b can be determined in the same manner as in the previous point. For x_2, $a > 0$ must hold. For x_4, it is either $b > 0$, or $b \leq 0$ and $e > 0$.

The other parameters may take any value.

3. In order to have multiple optimal solutions, at least one of the reduced costs of non-basic variables must be equal to 0. It means that the non-basic variable can enter the basis without changing the value of objective function. Therefore, we have the three possibilities :
   — $a = 0$. In this case, we will obtain another optimal solution if x_2 enters the base. In order to have a bounded problem, one of the coefficients in the column corresponding to x_2 must be greater than 0. Hence, $g > 0$ must hold. Finally, if the current solution is degenerate ($f = 0$) then the same conditions must verified by b as in point 1. Otherwise, if $f > 0$ then $b \geq 0$.
   — $b = 0$. If the solution is non-degenerate, we will obtain another optimal solution if x_4 enters the base. Again, to have a bounded problem, $e > 0$ or $h > 0$ must hold. If $f = 0$, in order to have another optimal solution, the following two conditions must hold : $e < 0$ so that the step is not equal to zero, and $h > 0$ so that x_5 can leave the base. Finally, because of the reasoning given in point 1, $a \geq 0$ must hold regardless of the degeneracy of the solution.
4. An unbounded problem is obtained if for each non-basic variable with a negative reduced cost, all coefficients of the corresponding column are zero or negative. This can happen with the following conditions on the parameters :
   (a) $a < 0$ and $g \leq 0$. In this case, x_2 can enter the base but the basic direction is unbounded.
   (b) $b < 0$, $e \leq 0$ and $h \leq 0$. Again, x_4 can enter the base but the basic direction will not be bounded.