Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Nikola Obrenovic, Nourelhouda Dougui

Réseaux et transbordement – corrigé (19 octobre 2018)

Solution de la question 1:

1. The degree d_i of the node v_i is the number of incident arcs. The outdegree d_i^+ of node i represents the number of incident arcs of the form (i, j) (we say that i is an *upstream node*), and the indegree d_i^- of node i is the number of incident arcs of the form (j, i) (we say that i is a *downstream node*).

$$\begin{array}{ccccccc} d_a = 2 & d_b = 3 & d_c = 4 & d_d = 5 & d_e = 4 & d_f = 3 & d_g = 3 \\ d_a^- = 0 & d_b^- = 2 & d_c^- = 2 & d_d^- = 2 & d_e^- = 1 & d_f^- = 2 & d_g^- = 3 \\ d_a^+ = 2 & d_b^+ = 1 & d_c^+ = 2 & d_d^+ = 3 & d_e^+ = 3 & d_f^+ = 1 & d_g^+ = 0 \end{array}$$

2. Considering two nodes $i, j \in \mathcal{N}$ and the set of arcs $\mathcal{A}$, the adjacency matrix $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ is defined as

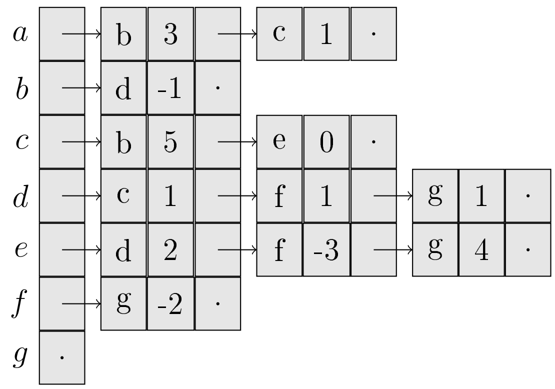
$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Thus the adjacency matrix of the network is the following :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. The adjacency list corresponding to node $i \in \mathcal{N}$ is a list of length equal to its outdegree d_i^+ (recall that the outdegree of node i is the number of arcs of the form $(i, j) \in \mathcal{A}$). Each element of the list corresponds to an arc going out of i. The flow x_{ij} associated with the corresponding arc may also be stored in the list. Each element of the list i is associated with an arc (i, j) and containts : the number j of the downstream node, x_{ij} and a pointer toward the next element in the list.

Here we obtain :



4. Since there exists a path between each pair of nodes, the network is connected.

5. Since there is no forward path from g to any other node, then the network is not strongly connected.

6. We are going to enumerate all simple forward path from node a to node g :
   - $a \to c \to e \to g$,
   - $a \to c \to e \to f \to g$,
   - $a \to c \to e \to d \to g$,
   - $a \to c \to e \to d \to f \to g$,
   - $a \to b \to d \to g$,
   - $a \to b \to d \to f \to g$,
   - $a \to b \to d \to c \to e \to g$,
   - $a \to b \to d \to c \to e \to f \to g$,
   - $a \to c \to b \to d \to g$,
   - $a \to c \to b \to d \to f \to g$.

7. Recall that divergence of node i is defined as :

$$\operatorname{div}(x)_i = \sum_{j|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k|(k,i)\in\mathcal{A}} x_{ki}.$$

   where $\mathcal{A}$ is the graph set of arcs.
   If this quantity is negative then node i is a demand node.
   If this quantity is positive then node i is a supply node.

If this quantity is null then node i is a transit node.

Let's calculate the divergence of each node and then determine its nature.
— $\text{div}(x)_a = 1 + 3 = 4$, therefore a is a supply node.
— $\text{div}(x)_b = -1 - (3 + 5) = -9$, therefore b is a demand node.
— $\text{div}(x)_c = 0 + 5 - (1 + 1) = 3$, therefore c is a supply node.
— $\text{div}(x)_d = 1 + 1 + 1 - (-1 + 2) = 2$, therefore d is a supply node.
— $\text{div}(x)_e = 4 - 3 + 2 - 0 = 3$, therefore e is a supply node.
— $\text{div}(x)_f = -2 - (-3 + 1) = 0$, therefore f is a transit node.
— $\text{div}(x)_g = -(4 - 2 + 1) = -3$, therefore g is a demand node.

Let's calculate the divergence of all nodes.

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \text{div}(x)_i = 4 - 9 + 3 + 2 + 3 + 0 - 3 = 0.$$

where $\mathcal{N}$ is the the graph set of nodes.
This result is general. For any flow vector the sum of all divergences is always zero. Indeed,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{N}} \text{div}(x)_i &= \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j | (i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k | (k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} \\
&= \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

In other words, every unit of flow that is generated somewhere is consumed somewhere else.

8. (a) The set of forward arcs is

$$\Gamma^{\rightarrow} = \{((b, d), (c, e)\}.$$

(b) The set of backward arcs is

$$\Gamma^{\leftarrow} = \{(d, c)\}.$$

(c) The flow through the cut is

$$\begin{aligned} X(\Gamma) &= \sum_{(i,j)\in\Gamma^{\rightarrow}} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in\Gamma^{\leftarrow}} x_{ij} \\ &= 0 + (-1) - 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Lets verify whether the flow through the cut is equal to the sum of divergences of the nodes belonging to that cut :

$$\sum_{i\in\mathcal{M}} \operatorname{div}(x)_i = 4 + 3 - 9 = -2 = X(\Gamma).$$

(d) The capacity of the cut is

$$\begin{aligned} U(\Gamma) &= \sum_{(i,j)\in\Gamma^{\rightarrow}} u_{ij} - \sum_{(i,j)\in\Gamma^{\leftarrow}} \ell_{ij} \\ &= 5 + 5 - (-3) \\ &= 13. \end{aligned}$$

Solution de la question 2:

Supposons par l'absurde que ce graphe ne soit pas connexe, il existe donc deux sommets x et y tels qu'il n'existe pas de chemin liant x à y. Le degré de chaque sommet étant au moins égal à p, x a au moins p voisins, et il en est de même pour y. Mais les voisins de x sont forcément tous distincts des voisins de y. Sinon, il existerait une chaine de longueur 2 joignant x à y. Le graphe comprend donc au moins $1 + 1 + p + p = 2p + 2$ sommets (x, y, les voisins de x, les voisins de y). On obtient donc une contradiction puisque le nombre de sommets du graphe est égal à $2p$. Le graphe est donc connexe.

Solution de la question 3:

On considère le plus long chemin simple dans le graphe. Notons ce chemin $[s_1, s_2, ..., s_p]$ où les s_i sont les sommets constituant le chemin. Posons $s = s_1$, et prouvons que le graphe obtenu en supprimant s_1 de G reste connexe.

Soient t, t' deux sommets de $G \setminus \{s\}$. Puisque G est connexe, il existe un chemin $C = [t_1, ..., t_k]$ **dans G**, le plus court possible, reliant $t = t_1$ à $t' = t_k$. Si ce chemin ne passe pas par s_1, alors t est connecté à t' dans $G \setminus \{s\}$. Sinon, il existe un unique $i \in \{2, ..., k-1\}$ tel que $t_i = s_1$. On peut déduire que :

- $t_{i-1} \in \{s_2, ..., s_p\}$, sinon on aurait pu ajouter le sommet t_{i-1} au début du chemin $[s_1, ..., s_p]$. Notons $t_{i-1} = s_u$.
- De même, $t_{i+1} \in \{s_2, ..., s_p\}$. Notons $t_{i+1} = s_v$, et pour fixer les idées, supposons que $u < v$.

On peut alors remplacer le sous-chemin $[t_{i-1}, t_i, t_{i+1}]$ par le sous-chemin $[s_u, s_{u+1}, ..., s_v]$, qui ne passe plus par s_1. Autrement dit, on a réussi à construire un chemin de t à t' ne passant pas par $s_1 \Rightarrow$ le graphe $G \setminus \{s\}$ est connexe.

Solution de la question 4:

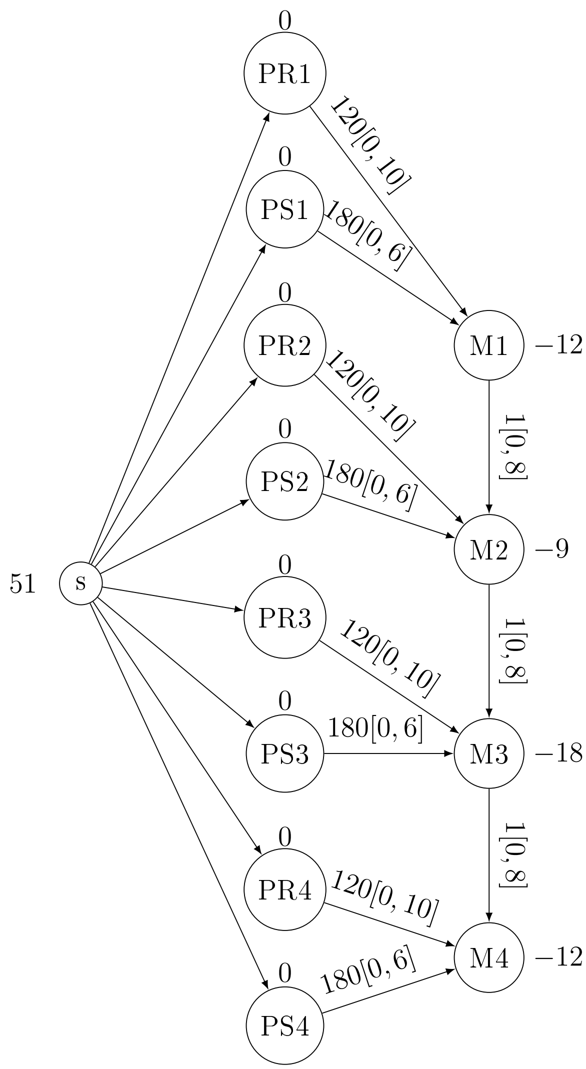
Afin de modéliser le problème sous forme de réseau, nous devons définir un graphe $G(V, E)$ avec V l'ensemble des noeuds et E l'ensemble des arcs. Nous devons ensuite déterminer les caractéristiques des noeuds (divergence) et les caractéristiques des arcs (capacité et coût). Une solution du problème correspondra au flux qui traversent le graphe. Une solution optimale correspondra a un flux de coût minimal qui traverse le graphe.
Nous définissons l'ensemble des noeuds ainsi :

- L'usine cherche à produire 51 turbines (puisqu'il lui faut livrer 53 turbines, et qu'il y en a déjà 2 en stock). Nous créons donc un noeud source s avec une une divergence de 51.
- L'usine doit livrer un certain nombre de turbine chaque mois. Nous créons donc des noeuds puits (demande) Mi, i=1,. . . ,4. La divergence pour les noeuds Mi, i=2,. . . ,4 est donnée par div(Mi)= - nombre de turbines à livrer au mois i. Pour le mois M1, on a div($M1$)= - 12. En effet, l'usine doit livrer 14 turbines pour ce mois et elle dispose de 2 turbines en stock.
- L'usine a la possiblité chaque mois de produire des turbines en heures régulières. Nous créons donc des noeuds de transit PRi, i=1,. . . ,4, dont la divergence est div(PRi)= 0.
- De même, l'usine a la possiblité chaque mois de produire des turbines en heures supplémentairs. Nous créons donc des noeuds de transit PSi, i=1,. . . ,4, dont la divergence est div(PSi)= 0.

Nous devons ensuite créer les arcs et définir leurs coûts et capacités. Les coûts sont exprimés en \$100'000 dollars, et donc 12 millions de dollars est représenté par 120.
On obtient les arcs suivant :

- Nous cherchons à determiner quelle quantité de turbine sera produite chaque mois en heures régulières et en heures supplémentaires. Nous créons donc des arcs entre s et les noeuds de production. Nous n'associons aucun coût ni bornes à ces arcs. Ces arcs permettent d'assurer que le nombre total de turbine produite est 51 (puisque div(s) = 51). Les flux traversant ces arcs représentent les quantité de productions.
- Nous créons un arc entre chaque noeud de production et le noeuds Mi correspondant. On associe à cet arc le coût de production, ainsi que les bornes de production.
- Nous créons des arcs entre Mi et Mi+1 (i=1,2,3). On associe à ces arc le coût de 1, la borne inférieur de 0 (on ne peut pas sotocker un nombre négatif de turbines) et la borne supérieure de 8. Les flux traversant ces arcs correspondent aux nombres de turbines stockées à la fin de chaque mois.

  On obtient le graphe suivant :



On peut vérifier que la solution optimale consiste à produire :

- Mois 1 : 10 en heures régulières, 2 en heures supplémentaires
- Mois 2 : 10 en heures régulières, 1 en heures supplémentaires
- Mois 3 : 10 en heures régulières, 6 en heures supplémentaires
- Mois 4 : 10 en heures régulières, 2 en heures supplémentaires

Deux turbines seront alors stockées entre le mois 2 et le mois 3.

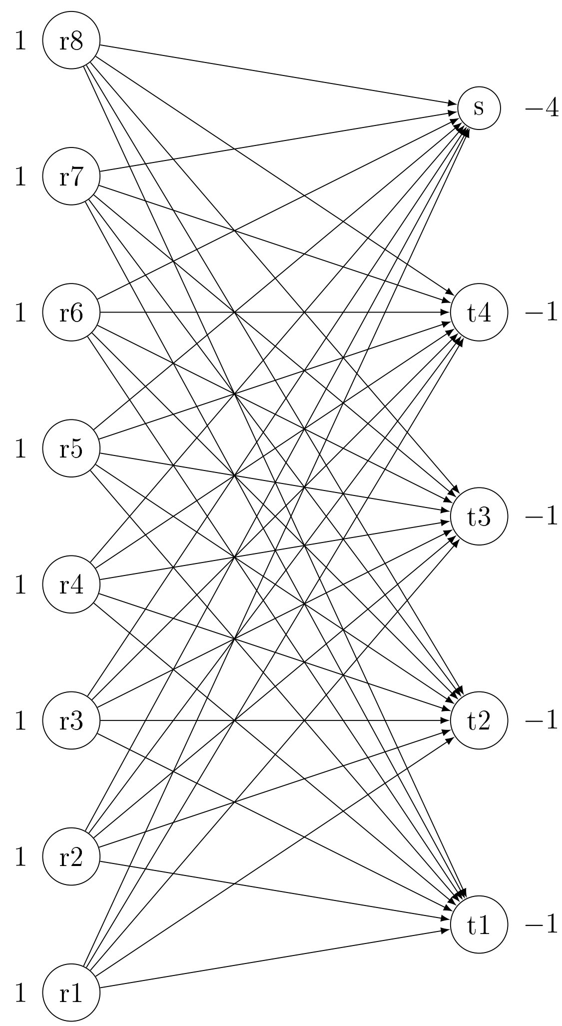
Solution de la question 5:

First, we are going to model the problem as a mathematical network $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$.

We introduce a node for each resource, and for each task. Thus, there are $m + n$ nodes. As there is more resources than tasks, we introduce a node s capturing the unassigned resources.

There is an arc from each resource i to each task j with cost c_{ij}. There is an arc from each resource i to the node s with with no cost. Each node corresponding to a resource has a supply 1 and each node corresponding to a task has a demand -1. The node s has a demand $n-m$ (note that $n-m < 0$ as $m > n$).
This representation allows us to assign at most one task to each resource, and each task is assigned to one resource. The remaining resources (that were not assigned to a task) are assigned to the node s. It takes into account the cost to assign task j to resource i.

Let's represent the graph for $n = 4$ and $m = 8$.



We are now going to write the problem as a transhipment problem.

- **Decision variables**
  The decision variables are :
  - binary variables x_{ij} being 1 if resource i is assigned to task j with $i \in \{1, ..., n\}$ and $j \in \{1, ..., m\}$.
  - binary variables x_{is} being 1 if resource i is assigned to the node s.
- **Objective function**
  The goal consists in assigning the m resources to the n tasks at minimal total cost. Thus, as c_{ij} denotes the cost to assign task j to resource

i, the objective function is

$$\min_x \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j \in \{1,\ldots,m\}} c_{ij} x_{ij}.$$

— **Constraints**

First, each task must be assigned to a resource :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Each resource must be assigned to a task or to the sink node :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{is} = 1, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

$m - n$ resources must be assigned to the sink node :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{is} = m - n.$$

The vector flow must be composed of binary variables. As we are in the case where the matrix A is totally unimodular and b integer, it is equivalent to the set of constraints :

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}, \forall j \in \{1,\ldots,n\}. \\ x_{is} &\geq 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}. \end{aligned}$$

We get the optimization problem

$$\min_x \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{j \in \{1,\ldots,m\}} c_{ij} x_{ij}$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{is} &= 1, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\} \\ x_{is} &\geq 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\} \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}, \forall j \in \{1,\ldots,n\}. \end{aligned}$$