Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2018–2019)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Nikola Obrenovic et Nourelhouda Dougui

Optimisation en nombres entiers (30 novembre 2018)

Solution de la question 1:

1. Si x_1 représente le nombre d'avions du premier type, et x_2 le nombre d'avions du deuxième type, les contraintes s'écrivent :

$$180x_1 + 300x_2 \geq 1000 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 \leq 6 \tag{2}$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N} \tag{3}$$

2. La région admissible du problème relaxé est représentée en gris sur la Figure 1.

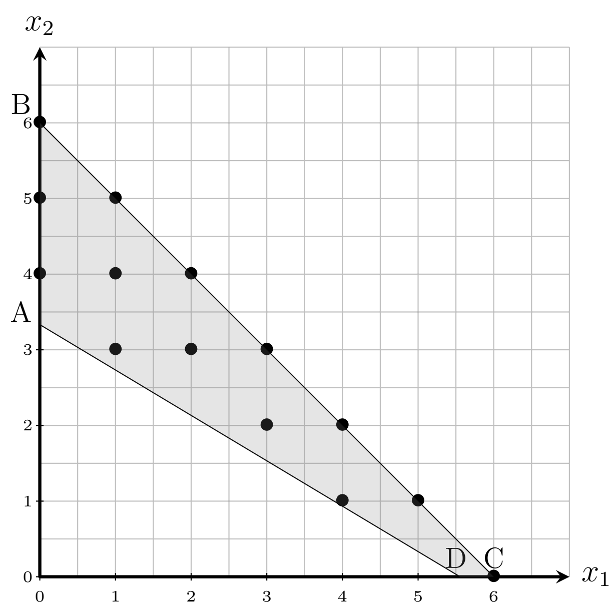

FIGURE 1 – Domaine admissible

3. Les solutions admissibles sont :

— (0,6) ; (0,5) ; (0 ;4) ; (1,5) ; (1,4) ; (1 ;3) ; (2,4) ;

— (2,3) ; (3,2) ; (3,3) ;(4,1) ; (4,2) ; (5,1) ; (6,0) ;

4. Afin de définir un polyèdre dont les sommets correspondent à des entiers, les contraintes sont modifiées comme suit :

$$x_1 + x_2 \geq 4 \tag{4}$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 6 \tag{5}$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 11 \tag{6}$$
$$x_1 + x_2 \leq 6 \tag{7}$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N} \tag{8}$$

La nouvelle région admissible du problème relaxé est représentée en gris sur la Figure 2.

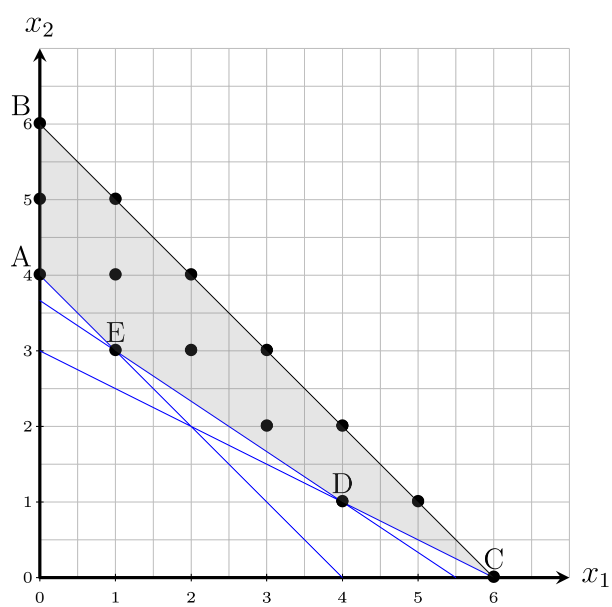

Figure 2 – Domaine admissible

Solution de la question 2:

Les détails sont repris à la Figure 3.

A chaque noeud, la borne supérieure UB représente la meilleure valeur admissible trouvée jusque là (notée f^* dans l'algorithme du cours). La borne inférieure est la solution de la relaxation linéaire ($f(x_R^*)$ dans l'algorithme du cours).

Au noeud racine, comme nous n'avons pas encore obtenu de solution entière, la borne supérieure est $+\infty$ (voir étape 9 de l'algorithme du cours). La solution du problème relaxé est $x_1^* = 11/5$, $x_2^* = 8/5$. La solution graphique est illustrée sur la Figure 4.

Comme nous branchons sur x_1, nous introduisons d'une part la contrainte

$$x_1 \leq \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor = 2,$$

et d'autre part

$$x_1 \geq \left\lceil \frac{11}{5} \right\rceil = 3.$$

Pour le sous-problème avec la contrainte supplémentaire $x_1 \leq 2$, la solution du problème relaxé est $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, avec une valeur de la fonction objectif égale à 10. La solution graphique est illustrée sur la Figure 5. Il s'agit d'une solution admissible pour le problème puisque toutes les variables sont entières. La borne supérieure est donc mise à jour et vaut 10.

Pour le sous-problème avec la contrainte supplémentaire $x_1 \geq 3$, la solution du problème relaxé est $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4/3$, avec une valeur de la fonction objectif égale à 10. La solution graphique est illustrée sur la Figure 6. Cette borne inférieure n'étant pas inférieur à la borne supérieure (10). Nous n'avons pas besoin de brancher sur x_2.

On a trouvé la solution au problème : $(2, 2)$,avec la valeur optimale 10.

Introduction à l'optimisation et
la recherche opérationnelle (2018–2019)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Nikola Obrenovic et Nourelhouda Dougui

Optimisation en nombres entiers (30 novembre 2018)

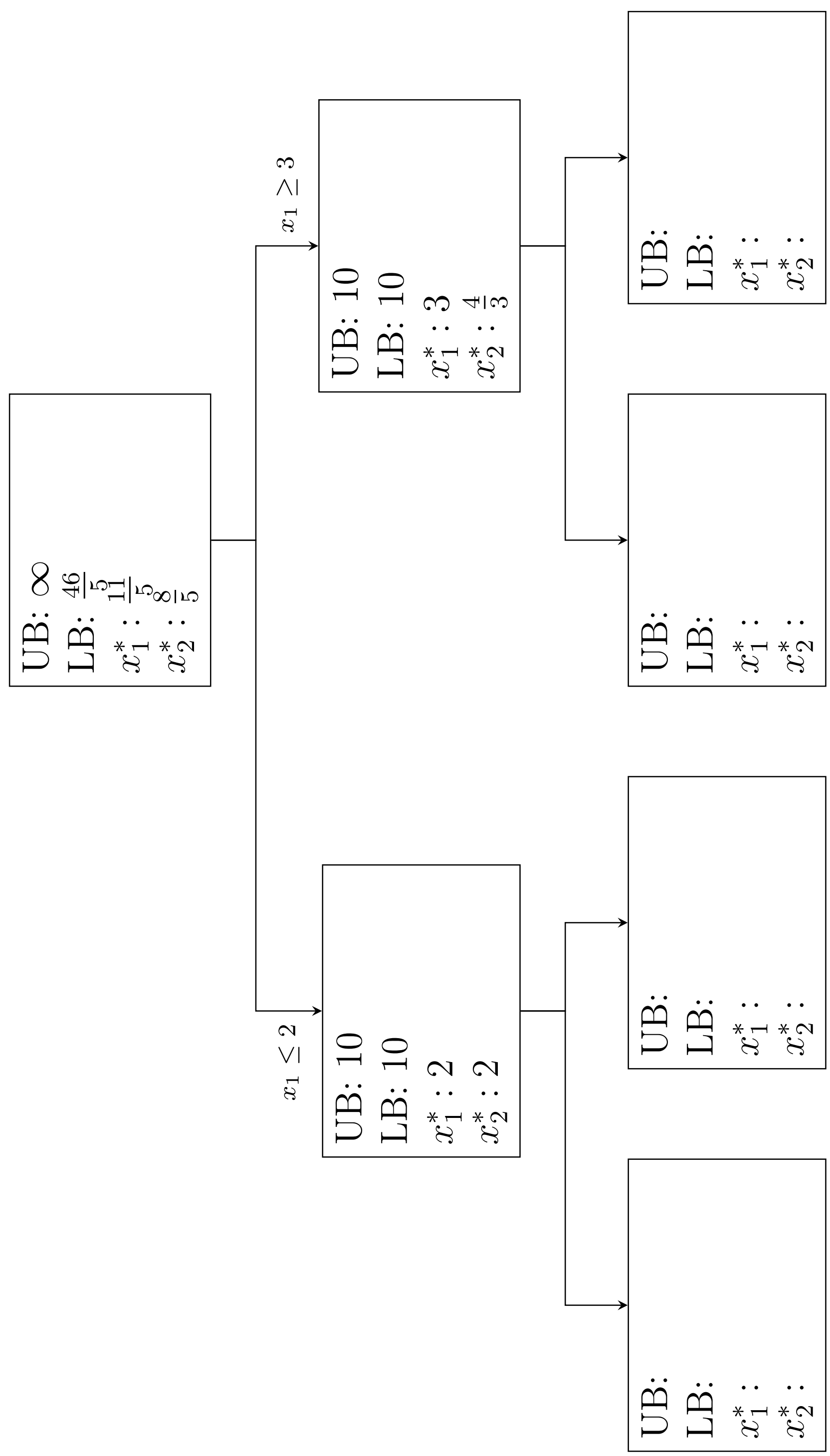

FIGURE 3 – Arbre de Branch & Bound

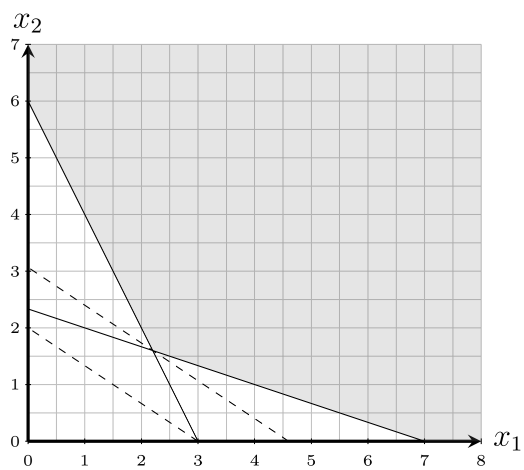

FIGURE 4 – Solution graphique du problème relaxé initial

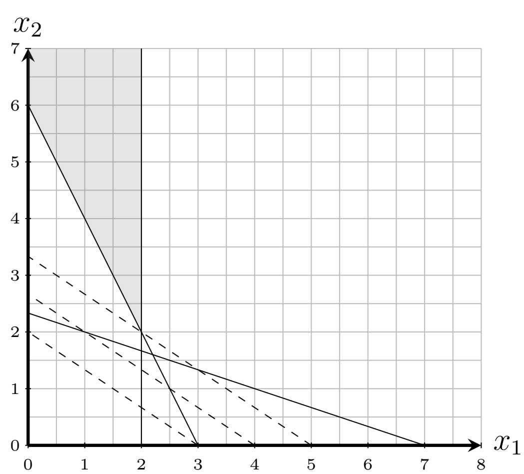

FIGURE 5 – Nouveau domaine avec $x_1 \leq 2$

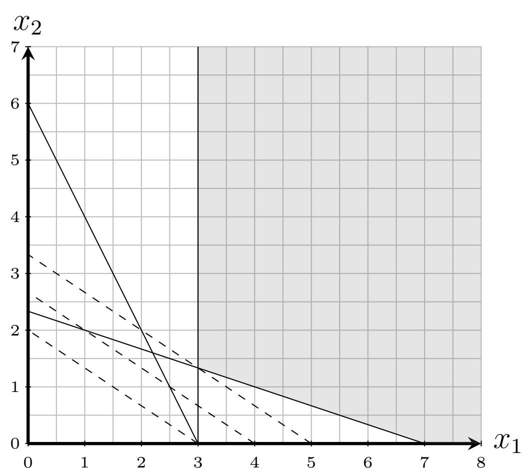

Figure 6 – Nouveau domaine avec $x_1 \geq 3$

Solution de la question 3:

Pour calculer une borne supérieure, il suffit de considérer une affectation arbitraire. Par exemple, $1 \to A, 2 \to C, 3 \to D, 4 \to B, 5 \to E$. Le coût total de cette affectation est $43+27+33+45+21 = 169$. Nous obtenons donc $f^* = 169$.

Appelons le problème P. Il est aisé de calculer une bonne inférieure pour P.

1. Le coût minimum pour la personne 1 est 43.
2. Le coût minimum pour la personne 2 est 20.
3. Le coût minimum pour la personne 3 est 33.
4. Le coût minimum pour la personne 4 est 27.
5. Le coût minimum pour la personne 5 est 21.

Dès lors, le coût total ne peut pas être inférieur à $43+20+33+27+21 = 144$ et $\ell(P) = 144$.

Nous séparons maintenant le problème P en 5 sous-problèmes. Pour chacun d'eux, nous fixons l'affectation d'un objet à l'acheteur 1, et recalculons la borne inférieure.

[P_A] $1 \to A$. $\ell(P_A) = 43 + 20 + 33 + 27 + 21 = 144$.

[P_B] $1 \to B$. $\ell(P_B) = 70+20+33+27+21 = 171$. Comme $171 \geq f^* = 169$, nous supprimons ce sous-problème.

[P_C] $1 \to C$. $\ell(P_C) = 73+20+33+27+21 = 174$. A nouveau, $174 \geq f^* = 169$, et nous supprimons ce sous problème.

[P_D] $1 \to D$. $\ell(P_D) = 65+20+45+45+21 = 196$. Sous-problème supprimé.

[P_E] $1 \to E$. $\ell(P_E) = 57+27+33+27+31 = 175$. Sous-problème supprimé.

Tous les sous-problèmes ont été supprimés, sauf P_A. Nous le décomposons à nouveau, en affectant un objet à l'ouvrier 2.

[P_{AB}] $1 \to A, 2 \to B$. $\ell(P_{AB}) = 43 + 84 + 33 + 27 + 21 = 208 \geq f^*$. Sous-problème supprimé.

[P_{AC}] $1 \to A, 2 \to C$. $\ell(P_{AC}) = 43 + 27 + 33 + 27 + 21 = 151$.

[P_{AD}] $1 \to A, 2 \to D$. $\ell(P_{AD}) = 43 + 92 + 45 + 45 + 21 = 246 \geq f^*$. Sous-problème supprimé.

[P_{AE}] $1 \to A, 2 \to E$. $\ell(P_{AE}) = 43 + 20 + 33 + 27 + 31 = 154$.

Restent les sous-problèmes P_{AC} et P_{AE}. Traitons d'abord P_{AE}, et affectons un objet à la troisième personne.

[P_{AEB}] $1 \to A, 2 \to E, 3 \to B$. $\ell(P_{AEB}) = 43 + 20 + 52 + 27 + 31 = 173$. Sous-problème supprimé.

[P_{AEC}] $1 \to A, 2 \to E, 3 \to C$. $\ell(P_{AEC}) = 43 + 20 + 61 + 27 + 34 = 185 \geq f^*$. Sous-problème supprimé.

[P_{AED}] $1 \to A, 2 \to E, 3 \to D$. $\ell(P_{AED}) = 43 + 20 + 33 + 45 + 31 = 172 \geq f^*$. Sous-problème supprimé.

Il reste le sous-problèmes P_{AC}.

[P_{ACB}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to B$. $\ell(P_{ACB}) = 43 + 27 + 52 + 27 + 21 = 170$. Sous-problème supprimé.

[P_{ACD}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to D$. $\ell(P_{ACD}) = 43 + 27 + 33 + 45 + 21 = 169$.

[P_{ACE}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to E$. $\ell(P_{ACE}) = 43 + 27 + 45 + 27 + 34 = 176 \geq f^*$. Sous-problème supprimé.

Le seul sous-problème restant est P_{ACD}. Affectons maintenant un objet au quatrième acheteur (et donc, automatiquement, au cinquième aussi).

[P_{ACDB}] $1 \to A, 2 \to C, 3 \to D, 4 \to B$. $\ell(P_{ACDB}) = 43+27+33+45+21 = 169$. Il s'agit d'une solution admissible.

P_{ACDE} $1 \to A, 2 \to C, 3 \to D, 4 \to E$. $\ell P_{ACDE} = 43 + 27 + 33 + 51 + 34 = 188 > f^* = 169$. Sous-problème supprimé.

L'affectation optimale est donc la solution du sous-problème P_{ACDB}, c'est-à-dire : $1 \to A, 2 \to C, 3 \to D, 4 \to B, 5 \to E$. Le coût optimal est 169.

Solution de la question 4:

Nous définissons les variables binaires suivantes :

- $x_1 = 1$ si la Leffe Brune fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_2 = 1$ si la Leffe Triple fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_3 = 1$ si la Leffe Vieille Cuvée fait partie de la sélection, 0 sinon.
- x_4= 1 si la Leffe Blonde fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_5 = 1$ si la Leffe Radieuse fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_6 = 1$ si la Leffe Rituel 9°fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_7 = 1$ si la Leffe Ruby fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_8 = 1$ si la Leffe Nectar fait partie de la sélection, 0 sinon.
- $x_9 = 1$ si la Leffe Royale fait partie de la sélection, 0 sinon.

(a) Sa sélection de Leffe doit contenir au moins trois bières mais ne peut contenir toutes les bières.

$$3 \leq \sum_i x_i \leq 8$$

(b) Sa sélection de Leffe doit contenir au moins deux bières de moins de 7%.

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 2$$

(c) Sa sélection de Leffe peut contenir plus de trois bières blondes si et seulement si elle contient une bière ambrée. Cela signifie que

$$\text{si } x_3 + x_5 = 0, \text{ alors } x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \leq 3$$

On définit une nouvelle variable $y = 1$ si la sélection ne contient pas de bière ambrée :

$$x_3 + x_5 \geq 1 - y \text{ et } x_3 + x_5 \leq 2 - 2y.$$

La première contrainte permet de vérifier que si la sélection ne contient pas de bière ambrée, c'est à dire si $x_3 + x_5 = 0$ alors y doit prendre la valeur 1. La deuxième contrainte permet de vérifier que si la sélection contient une bière ambrée, c'est-à-dire si $x_3 + x_5 = 1$ ou $x_3 + x_5 = 2$ alors y doit prendre la valeur 0. Ainsi, $x_3 + x_5 = 0$ est équivalent à $y = 1$. Finalement, il reste à modéliser que

$$\text{si } y = 1, \text{ alors } x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \leq 3$$

Cette condition est remplie grâce à la contrainte suivante :

$$x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_9 \leq 3y + 5(1 - y)$$

Il est facile de vérifier que si $y = 1$, alors le terme de droite vaut 3 et la somme de gauche doit être inférieure à 3. Par contre si $y = 0$, le terme de droite vaut 5 et aucune des variables n'est contrainte (puisque la somme de 5 variables binaires est toujours inférieure à 5).

(d) Sa sélection de Leffe ne peut contenir la Radieuse si la Nectar est sélectionnée.

$$x_5 \leq 1 - x_8$$

Il est facile de vérifier que si $x_8 = 1$, alors x_5 ne peut prendre que la valeur 0. Par contre si $x_8 = 0$, x_5 est libre de prendre la valeur 0 ou 1.

(e) Sa sélection de Leffe peut contenir une bière de plus de 10 ans si et seulement si une bière de moins de 6% est sélectionnée. Cela signifie que

$$\text{si } x_7 + x_8 \leq 0, \text{ alors } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

On définit une nouvelle variable $y = 1$ si la sélection ne contient pas de bière de moins de 6% :

$$x_7 + x_8 \geq 1 - y \text{ et } x_7 + x_8 \leq 2 - 2y.$$

La première contrainte permet de vérifier que si la sélection ne contient pas de bière de moins de 6%, c'est-à-dire $x_7 + x_8 \leq 0$ alors y doit prendre la valeur 1. La deuxième contrainte permet de vérifier que si la sélection contient une bière de moins de 6%, c'est-à-dire $x_7 + x_8 > 0$ lors y doit prendre la valeur 0. Ainsi, $x_7 + x_8 \leq 0$ est équivalent à $y = 1$. Finalement, il reste à modéliser que

$$\text{si } y = 1, \text{ alors } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

Cette condition est remplie grâce à la contrainte suivante :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 6(1 - y)$$

Il est facile de vérifier que si $y = 1$, alors le terme de droite vaut 0 et la somme de gauche doit être nulle. Par contre si $y = 0$, le terme de droite vaut 6 et aucune des variables n'est contrainte (puisque la somme de 6 variables binaires est toujours inférieure à 6).

(f) Sa sélection de Leffe contient soit à la fois de la Leffe Blonde et de la Leffe Brune, soit aucune des deux.

$$x_1 = x_4$$

Solution de la question 5:

Chaque décision est modélisée par une variable binaire x_i qui vaut 1 si l'étudiant i est engagé, et 0 sinon.

Voici l'équation pour chacune des contraintes :

(a) Au moins deux candidats doivent être choisis.

$\sum_i x_i \geq 2$

(b) Maximum 3 assistants peuvent être pris pour le cours.

$\sum_i x_i \leq 3$

(c) Au moins un assistant doit parler couramment français.

$x_1 + x_2 + x_4 \geq 1$

(d) Eva ne souhaite être assistante que si Meri ou Marija l'est également.

$x_3 - x_5 - x_6 \leq 0$

(e) Riccardo ne peut pas être choisi si Anna est choisie.

$x_7 + x_2 - 1 \leq 0$

(f) Au moins un assistant doit avoir de l'experience dans le cours.

$x_4 + x_8 \geq 1$