Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Nikola Obrenovic, Nourelhouda Dougui

Modélisation (21 septembre 2018)

Question 1:

Un vétérinaire cherche à constituer un mélange de céréales qui permettrait de fournir une diète équilibrée aux chiens. Pour ce faire, il désire composer sa nourriture à partir de 3 céréales : orge, blé et maïs. Les caractéristiques de ces trois céréales sont données dans le tableau suivant. Si le vétérinaire désire que ses chiens consomment au moins 250 g de protéines, exactement 40 g d'amidon, et au plus 20 g de matières grasses, quelle quantité en kilogrammes de chacune des céréales doit être présente dans le mélange afin de constituer un repas à moindre coût pour les chiens ?

Céréale	Coût/kg (CHF)	Amidon (%)	Protéines (%)	Matières grasses (%)
L'orge	0.90	60	11	2.5
Le blé	0.76	65	12.5	2
Le maïs	0.54	72	10	5

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation en déterminant
   (a) les variables de décision,
   (b) la fonction objectif,
   (c) la/les contrainte(s).
2. Formuler ce problème comme un problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure.
3. Formuler ce problème comme un problème de maximisation avec des contraintes d'égalité et des contraintes de non-négativité sur les variables de décision.

Question 2:

Les prix de vente d'un certain nombre de maisons dans une partie de la ville avec vue sur le lac sont donnés dans le tableau suivant, ainsi que la taille du lot et son élévation :

Prix de vente (CHF) P_i	Lot size (m^2) L_i	Elevation (mètres) E_i
1 550 000	12 000	350
1 200 000	10 000	300
1 000 000	9 000	100
700 000	8 000	200
600 000	6 000	100
1 000 000	9 000	200

Un agent immobilier veut construire un modèle de régression linéaire pour prévoir les prix de vente des autres maisons dans cette partie de la ville à partir de leurs tailles de lot et élévations. L'agent estime qu'un modèle linéaire de la forme

$$P = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 E$$

serait raisonnablement précis et facile à utiliser. Les coefficients β_1 et β_2 indiquent comment le prix varie selon la taille du lot et l'élévation, respectivement, tandis que β_0 représente un prix de référence moyen pour cette section de la ville, et est appelé la "constante".

L'agent souhaite sélectionner le "meilleur" modèle linéaire possible, c'est-à-dire trouver la valeur des coefficients β_0, β_1 et β_2 qui permettent au modèle de reconstituer les données au mieux. Pour chaque observation i, le prix prédit par le modèle est

$$\widehat{P}_i = \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i \quad i = 1, 2, ..., 6. \tag{1}$$

1. Formuler un problème d'optimisation pour trouver la "meilleure" valeur de β_0, β_1, et β_2, en minimisant les écarts au carré :

$$\sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \widehat{P}_i)^2.$$

2. Proposer la formulation d'un problème d'optimisation **linéaire** pour minimiser les critères suivants
   (a) $\sum_{i=1,\ldots,6} |P_i - \widehat{P}_i|$,
   (b) $\max_{i=1,\ldots,6} |P_i - \widehat{P}_i|$.

Question 3:

Une banque veut déterminer comment investir ses actifs pour l'année à venir. À l'heure actuelle, la banque a un million d'euros qu'elle peut investir dans des obligations, des prêts immobiliers, des prêts automobiles ou des prêts étudiants. Les taux d'intérêt annuels des différents types de placements sont de 4% pour les obligations, 6% pour les prêts immobiliers, 8% pour les prêts automobiles et 9% pour les prêts étudiants.
Afin de minimiser les risques, le portefeuille sélectionné par la banque doit satisfaire les restrictions suivantes :

— Le montant alloué aux prêts automobiles et étudiants ne doit pas dépasser la moitié de celui investi dans des obligations.
— Le montant alloué à des prêts étudiants ne doit pas dépasser celui alloué aux prêt automobiles.
— Au plus 10% du montant total investi peut être affecté à des prêts étudiants.

1. Formuler ce problème comme un problème d'optimisation en déterminant
   (a) les variables de décision,
   (b) la fonction objectif,
   (c) la/les contrainte(s).
2. Formuler ce problème comme un problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure.
3. Formuler ce problème comme un problème de maximisation avec des contraintes d'égalité et des contraintes de non-négativité sur les variables de décision.

Question 4:

Un avion cargo possède trois compartiments pour le chargement de frêt : un à l'avant, un au centre et un dernier à l'arrière. Les limites de capacité en poids et en volume sont résumées dans le tableau suivant :

Compartiment	Capacité en poids (Tonne)	Capacité en volume (m^3)
Avant	12	1000
Centre	18	1300
Arrière	10	700

Pour des raisons de stabilité de l'avion en vol, le chargement doit être équilibré dans chaque compartiment, c'est-à-dire que, pour les trois compartiments, le chargement doit représenter la même proportion, en poids, de la limite de charge. L'avion a la possibilité de charger les quatre frêts suivant :

Frêt	Poids (Tonne)	Encombrement (m^3/tonne)	Bénéfice (CHF/tonne)
1	20	70	220
2	16	100	280
3	25	85	250
4	13	60	200

On peut prendre n'importe quelle portion de ces frêts. En d'autres termes, on peut choisir de ne pas transporter l'intégralité d'un frêt.

1. Ecrire le problème qui consiste à trouver un chargement de cet avion qui maximise le bénéfice sous forme d'un programme linéaire.
2. Comment faire lorsque chaque type de frêt est composé de palettes d'une tonne ?