Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2017–2018)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Nikola Obrenovic, Nourelhouda Dougui

Modélisation – corrigé (21 septembre 2018)

Solution de la question 1:

1. Les variables de décision sont :
   - x_o : la quantité d'orge en kg utilisée.
   - x_b : la quantité de blé en kg utilisée.
   - x_m : la quantité de maïs en kg utilisée.

   Le vétérinaire cherche à minimiser le coût de son mélange. La fonction objectif est donc :

   $$\min 0.9x_o + 0.76x_b + 0.54x_m$$

   Les contraintes du problème sont :

   $$\begin{aligned} 0.11x_o + 0.125x_b + 0.1x_m &\geq 0.25 \text{ (Protéines)} \\ 0.6x_o + 0.65x_b + 0.72x_m &= 0.04 \text{ (Amidon)} \\ 0.025x_o + 0.02x_b + 0.05x_m &\leq 0.02 \text{ (Matières grasses)} \\ x_o, x_b, x_m &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Nous devons transformer les contraintes du problème afin d'avoir uniquement des contraintes d'inégalité inférieure :
   - Une contrainte définie par une inégalité supérieure peut être multipliée par -1 pour obtenir une contrainte d'inégalité inférieure :

   $$0.11x_o + 0.125x_b + 0.1x_m \geq 0.25 \Leftrightarrow$$
   $$-0.11x_o - 0.125x_b - 0.1x_m \leq -0.25$$

   - Une contrainte définie par une égalité peut être remplacée par deux contraintes d'inégalité inférieure :

   $$0.6x_o + 0.65x_b + 0.72x_m = 0.04 \Leftrightarrow$$
   $$\begin{cases} -0.6x_o - 0.65x_b - 0.72x_m \leq -0.04 \\ 0.6x_o + 0.65x_b + 0.72x_m \leq 0.04 \end{cases}$$

Le problème peut donc s'écrire :

$$\min 0.9x_o + 0.76x_b + 0.54x_m$$

sous contraintes :

$$\begin{aligned}
-0.11x_o - 0.125x_b - 0.1x_m &\leq -0.25 \\
-0.6x_o - 0.65x_b - 0.72x_m &\leq -0.04 \\
0.6x_o + 0.65x_b + 0.72x_m &\leq 0.04 \\
0.025x_o + 0.02x_b + 0.05x_m &\leq 0.02 \\
-x_o &\leq 0 \\
-x_b &\leq 0 \\
-x_m &\leq 0
\end{aligned}$$

3. Un problème de minimisation dont la fonction objective est $f(x)$ est équivalent à un problème de maximisation dont la fonction objectif est $-f(x)$ et on a :

   $$\min f(x) = -\max -f(x)$$

   La fonction objectif de notre problème devient donc :

   $$-\max -0.9x_o - 0.76x_b - 0.54x_m$$

   Afin d'obtenir des contraintes d'égalité à partir de contraintes d'inégalité, nous devons introduire des variables d'écart tel que leurs valeur doit être strictement positive et on a :

   $$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) - y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

   On a donc :

   $$0.11x_o + 0.125x_b + 0.1x_m \geq 0.25 \Leftrightarrow$$
   $$\begin{cases} 0.11x_o + 0.125x_b + 0.1x_m - x_1 = 0.25 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

De même :

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g(x) + y = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

On a donc :

$$0.025x_o + 0.02x_b + 0.05x_m \leq 0.02 \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} 0.025x_o + 0.02x_b + 0.05x_m + x_2 = 0.02 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Le problème peut donc s'écrire :

$$-\max -0.9x_o - 0.76x_b - 0.54x_m$$

sous contraintes :

$$\begin{aligned} 0.11x_o + 0.125x_b + 0.1x_m - x_1 &= 0.25 \\ 0.6x_o + 0.65x_b + 0.72x_m &= 0.04 \\ 0.025x_o + 0.02x_b + 0.05x_m + x_2 &= 0.02 \\ x_o, x_b, x_m, x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution de la question 2:

1. Nous commençons par définir les variables de décision :
   — $\widehat{P}_i$: prix de vente prédit pour l'observation i, $i = 1, \ldots, 6$,
   — β_0 : constante,
   — β_1 : coefficient de la taille du lot,
   — β_2 : coefficient de l'élévation.

   La fonction objectif est simplement

$$\sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \widehat{P}_i)^2.$$

   Les contraintes définissent le prix de vente prédit par le modèle pour chaque observation :

$$\widehat{P}_i = \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i \quad i = 1, \ldots, 6,$$

de sorte que le problème d'optimisation est écrit comme suit :

$$\min \sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \widehat{P}_i)^2,$$

sous contraintes

$$\widehat{P}_i = \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i \quad i = 1, \ldots, 6.$$

En remplaçant les contraintes dans la fonction objectif, nous obtenons un problème d'optimisation sans contrainte :

$$\min \sum_{i=1,\ldots,6} (P_i - \beta_0 - \beta_1 L_i - \beta_2 E_i)^2.$$

2. (a) Nous introduisons pour chaque i une nouvelle variable Q_i représentant la valeur absolue. La fonction objectif s'écrit

$$\min \sum_{i=1}^{6} Q_i.$$

Pour définir Q_i, nous devons inclure les contraintes suivantes :

$$P_i - \widehat{P}_i \leq Q_i \qquad i = 1, \ldots, 6,$$

et

$$\widehat{P}_i - P_i \leq Q_i \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Notez que cette formulation fonctionne parce que nous essayons de minimiser les sommes de Q_i. En effet, les deux contraintes en tant que telles ne sont pas suffisantes pour caractériser que Q_i est la valeur absolue de $P_i - \widehat{P}_i$. Mais comme nous minimisons, l'une des deux contraintes sera active à la solution pour chaque i, de sorte que Q_i sera effectivement égal à la valeur absolue, à l'optimum.
Si on remplace $\widehat{P}_i$ par son expression, on obtient le système suivant :

$$\min \textstyle\sum_{i=1}^{6} Q_i$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} P_i - \beta_0 - \beta_1 L_i - \beta_2 E_i &\leq Q_i \qquad i = 1, \ldots, 6 \\ \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i - P_i &\leq Q_i \qquad i = 1, \ldots, 6 \end{aligned}$$

(b) Nous introduisons une nouvelle variable R qui représente la plus grande valeur absolue, de sorte que la fonction objectif soit égale à

$$\min R$$

Pour définir R, nous devons inclure les contraintes suivantes, dans le même esprit que la question précédente :

$$P_i - \widehat{P}_i \leq R \qquad i = 1, \ldots, 6,$$

et

$$\widehat{P}_i - P_i \leq R \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Notez encore que cela fonctionne parce que nous minimisons R. L'une des contraintes sera active au niveau de la solution optimale, et R sera égal à la valeur absolue maximale.
Si on remplace $\widehat{P}_i$ par son expression, on obtient le système suivant :

$$\begin{array}{lrl} & \min R & \\ \text{sous contraintes} & & \\ & P_i - \beta_0 - \beta_1 L_i - \beta_2 E_i \leq R & i = 1, \ldots, 6 \\ & \beta_0 + \beta_1 L_i + \beta_2 E_i - P_i \leq R & i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

Solution de la question 3:

1. Les variables de décision sont :
   - x_1 : les montants investis exprimés en millions d'euros pour les obligations,
   - x_2 : les montants investis exprimés en millions d'euros pour les prêts immobiliers,
   - x_3 : les montants investis exprimés en millions d'euros pour les prêts automobiles,
   - x_4 : les montants investis exprimés en millions d'euros pour les prêts étudiant.

   La banque veut maximiser les rendements donnés par

$$\max 1.04x_1 + 1.06x_2 + 1.08x_3 + 1.09x_4$$

sous contraintes

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_3 + x_4 &\leq 0.5x_1 \\
x_4 &\leq x_3 \\
x_4 &\leq 0.1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Un problème de maximisation dont la fonction objective est $f(x)$ est équivalent à un problème de minimisation dont la fonction objectif est $-f(x)$ et on a :
$$\max f(x) = -\min -f(x)$$
La fonction objectif de notre problème devient donc :
$$-\min -1.04x_1 - 1.06x_2 - 1.08x_3 - 1.09x_4$$
Nous devons transformer les contraintes du problème afin d'avoir uniquement des contraintes d'inégalité inférieure. Une contrainte définie par une égalité peut être remplacée par deux contraintes d'inégalité inférieure :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq -1 \end{cases}$$

Le problème peut donc s'écrire :

$$-\min -1.04x_1 - 1.06x_2 - 1.08x_3 - 1.09x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\leq -1 \\ -0.5x_1 + x_3 + x_4 &\leq 0 \\ -x_3 + x_4 &\leq 0 \\ x_4 &\leq 0.1 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0 \\ -x_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

3. Afin d'obtenir des contraintes d'égalité à partir de contraintes d'inégalité, nous devons introduire des variables d'écart tel que leurs valeur doit être strictement positive et on a :

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) + y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$x_3 + x_4 \leq 0.5x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -0.5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_4 \leq x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_4 \leq 0.1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 + x_7 = 0.1 \\ x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème peut donc s'écrire

$$\max 1.04x_1 + 1.06x_2 + 1.08x_3 + 1.09x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
-0.5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\
-x_3 + x_4 + x_6 &= 0 \\
x_4 + x_7 &= 0.1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
\end{aligned}$$

Solution de la question 4:

1. Les données du problème sont :
   - cp_j : la capacité en poids exprimée en tonne du compartiment j, $j \in \{1,..,3\}$,
   - cv_j : la capacité en volume exprimée en m^3 du compartiment j, $j \in \{1,..,3\}$,
   - p_i : le poids en tonne du frêt i disponible, $i \in \{1,..,4\}$,
   - v_i : le volume en m^3 qu'occupe une tonne du frêt i, $i \in \{1,..,4\}$,
   - b_i : le bénéfice en CHF obtenu en transportant une tonne du frêt i, $i \in \{1,..,4\}$.

   Les variables de décision sont :
   - x_{ij} : le poids en tonne du frêt i que l'avion transporte dans le compartiment j, $i \in \{1,..,4\}$ $j \in \{1,..,3\}$.

   L'objectif est de maximiser le bénéfice obtenu en transportant le frêt :

   $$\max \sum_{i=1}^{4} b_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

   Les contraintes du problème sont :
   - ne pas dépasser la capacité en poids de chaque compartiment j :

   $$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq cp_j \quad \forall j \in \{1,..,3\}$$

— ne pas dépasser la capacité en volume de chaque compartiment j :

$$\sum_{i=1}^{4} v_i x_{ij} \leq cv_j \quad \forall j \in \{1,..,3\}$$

— transporter au plus la quantité de frêt i disponible :

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq p_i \quad \forall i \in \{1,..,4\}$$

— pour les trois compartiments, le chargement doit représenter la même proportion, en poids, de la limite de charge :

$$\frac{1}{cp_1}\sum_{i=1}^{4} x_{i1} = \frac{1}{cp_2}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} = \frac{1}{cp_3}\sum_{i=1}^{4} x_{i3}$$

— la quantité x_{ij} transportée ne peut pas être négative :

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \{1,..,4\} \forall j \in \{1,..,3\}$$

On obtient donc le problème suivant :

$$\max \sum_{i=1}^{4} b_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

sous contraintes :

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq cp_j \quad \forall j \in \{1,..,3\}$$

$$\sum_{i=1}^{4} v_i x_{ij} \leq cv_j \quad \forall j \in \{1,..,3\}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq p_i \quad \forall i \in \{1,..,4\}$$

$$\frac{1}{cp_1}\sum_{i=1}^{4} x_{i1} - \frac{1}{cp_2}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 0$$

$$\frac{1}{cp_2}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} - \frac{1}{cp_3}\sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \{1,..,4\} \forall j \in \{1,..,3\}$$

2. Chaque type de frêt est à présent composé de palettes d'une tonne. Les variables x_{ij} doivent donc être entières. on a donc la nouvelle contrainte :

$$x_{ij} \in \mathbb{N}$$

Le problème devient donc un problème de programmation linéaire en nombre entier :

$$\max \sum_{i=1}^{4} b_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

sous contraintes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq cp_j \quad \forall j \in \{1,..,3\} \\
&\sum_{i=1}^{4} v_i x_{ij} \leq cv_j \quad \forall j \in \{1,..,3\} \\
&\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq p_i \quad \forall i \in \{1,..,4\} \\
&\frac{1}{cp_1}\sum_{i=1}^{4} x_{i1} - \frac{1}{cp_2}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 0 \\
&\frac{1}{cp_2}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} - \frac{1}{cp_3}\sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 0 \\
&x_{ij} \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1,..,4\} \forall j \in \{1,..,3\}
\end{aligned}$$

Note : Cette exercice est une version simplifiée du problème réel de chargement de conteneurs (*Container Loading Problem*). On peut se référer à l'article (https ://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.02.027) pour la modélisation du problème sous forme de MIP et sa résolution.