Introduction à l'optimisation linéaire (28 September 2018)

Question 1:

Consider the following polyhedron represented in canonical form :

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$$

with

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Draw the polyhedron.
2. Write the polyhedron in standard form and explain the relation between the constraints and the slack variables.

Question 2:

Consider the domain of feasible solutions represented in Figure 1.

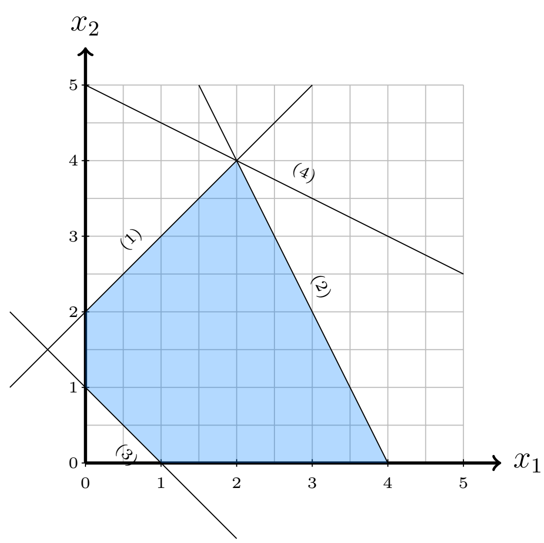

FIGURE 1 – Feasible domain

1. Formulate 6 constraints which determine the feasible domain given in Figure 1.
2. Write the linear optimization problem in standard form, with the previously identified constraints and the following objective function :

$$\max x_1 - 2x_2.$$

   Determine the matrix $\boldsymbol{A}$ as well as the vectors $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$.
3. Calculate all basic solutions of the optimization problem and for each of them determine if it is feasible. Present the feasible ones on the graph in Figure 1.
   What do basic solutions correspond to ?
   Is there any degenerate feasible basic solution ?
4. Prove that the point (3,2) is a feasible solution, but not a basic one.

Question 3:

Consider the polyhedron defined as follows :

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Determine whether the given directions $d \in \mathbb{R}^2$ are feasible for the given feasible points $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ of $\mathcal{P}$:

1. $x_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
2. $x_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
3. $x_c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, and
4. $x_d = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $d_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Question 4 – QCM:

1. Un préparateur de café mélange du café brésilien et du café colombien pour préparer deux types de produits finis : le café Super et le café Deluxe. Chaque kilogramme de café Super contient 0,5 kg de café brésilien et 0,5 kg de café colombien, alors que chaque kilogramme de café Deluxe contient 0,3 kg de café brésilien et 0,7 kg de café colombien. Le préparateur de café dispose de 120 kg de café brésilien et de 160 kg de café colombien. Le bénéfice pour chaque kilogramme de café Super est de 22 cents et le bénéfice pour chaque kilogramme de café Deluxe est de 34 cents. Le préparateur de café veut déterminer combien de kilogrammes de chaque type de café devraient être mélangé afin de maximiser ses profits.

   Si x_1 représente la quantité de café Super et x_2 la quantité de café Deluxe, comment ce problème peut-il être formulé ?

   (a)

$$\begin{aligned} \max 0.22x_1 + 0.34x_2 & \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 &\leq 120 \\ 0.3x_1 + 0.7x_2 &\leq 160 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 & \\ 0.8x_1 &\leq 120 \\ 1.2x_2 &\leq 160 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} \max 0.22x_1 + 0.34x_2 & \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 &\leq 120 \\ 0.5x_1 + 0.7x_2 &\leq 160 \end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\max 0.22x_1 + 0.34x_2 & \\
0.5x_1 + 0.3x_2 &\leq 120 \\
0.5x_1 + 0.7x_2 &\leq 160 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Soit un problème d'optimisation linéaire en forme standard avec $n = 6$ variables et $m = 4$ contraintes d'égalité. Si le problème est incompatible (*infeasible*), le nombre de solutions vérifiant toutes les contraintes est
   (a) supérieur ou égal à 6,
   (b) 0,
   (c) infini,
   (d) inférieur ou égal à 2.
3. Le domaine admissible défini par les contraintes

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &\geq 0, \\
x_1 + x_2 &\leq 1, \\
x_1 &\leq 6 \text{ et} \\
x_2 &\geq -3
\end{aligned}
$$

   (a) est vide,
   (b) a un sommet et est borné,
   (c) a un sommet et est non borné,
   (d) a trois sommets et est borné,
   (e) a trois sommets et est non borné.

   Existe-t-il une contrainte redondante ? Si oui, quelle est cette contrainte ?
4. Lequel des points suivants est une solution admissible de base du problème d'optimisation linéaire ci-dessous ?

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
s.c.\ & -x_1 + 4x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 - x_3 \leq 2 \\
& x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 2)$

(b) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$

(c) $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2)$

(d) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 2)$