Introduction à l'optimisation linéaire (5 octobre 2018)

Question 1:

Ecrire le problème suivant sous forme standard :

$$\max -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &\geq 7 && (1)\\
8x_1 - 5x_3 + 3x_4 &\leq 8 && (2)\\
-2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &\leq -6 && (3)\\
1 \leq x_1 &\leq 4, && (4)\\
x_2 &\geq -3, && (5)\\
x_3 &\in \mathbb{R}, && (6)\\
x_4 &\leq 0 && (7)
\end{aligned}$$

Question 2:

Considérer le problème

$$\min -3x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\geq -2 \quad (1)\\
2x_1 + x_2 &\leq 8 \quad (2)\\
x_1 + x_2 &\leq 5 \quad (3)\\
x_1 &\geq 0 \quad (4)\\
x_2 &\geq 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

1. Exprimer le problème sous forme standard.
2. Représenter graphiquement le domaine admissible.
3. Calculer les solutions de base, identifier les sur le graphique, déterminer lesquelles sont admissibles et déterminer quelles sont les contraintes actives au niveau de chaque solution.

4. Considérer la solution de base correspondante au variables de base (x_1, x_2, x_3) avec x_3 la variable d'écart obtenue en écrivant la première contrainte sous forme standard. Calculer les directions de base associées à cette solution. Est ce que ces directions sont admissibles ?

Question 3:

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min -x_1 - x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 10 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 20 \\ -x_1 + x_2 &\leq b \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

où $b \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Représenter le domaine réalisable pour $b = 2$.
2. Quelle est la solution optimale du problème pour $b = 2$?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de b le problème devient-il non réalisable ?

Question 4:

Considérez le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min -x_1 - cx_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 &\leq 1 \\ 0 \leq x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ assurent que

1. L'unique solution optimale de (P) soit dégénérée.
2. (P) possède une infinité de solutions optimales.

Question 5:

Soit le polytope sous forme standard $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ une solution de base admissible de Q. Quand a-t-on une direction de base en x qui n'est pas admissible ? Pourquoi ?

Question 6:

Formuler un problème d'optimisation linéaire ayant une infinité de solutions optimales avec :

(a) 0 sommet optimal.

(b) 1 sommet optimal.

(c) 2 sommet optimaux.