Introduction à l'optimisation et
la recherche opérationnelle (2018–2019)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Nikola Obrenovic, Nourelhouda Dougui

Introduction à l'optimisation linéaire – corrigé (5 octobre 2017)

Solution de la question 1:

Nous souhaitons écrire le problème linéaire en forme standard, c'est-à-dire sous la forme

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
\text{sous contraintes} & Ax = b, \\
 & x \geq 0.
\end{array}
$$

Pour se ramener à un problème de minimisation, il suffit de se rappeler que $\max f(x)$ est équivalent à $\min -f(x)$. La fonction objectif peut dès lors s'écrire

$$\min 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 4x_4$$

Nous allons maintenant ré-écrire chacune des 7 contraintes sous la forme $Ax = b, x \geq 0$.
Les contraintes (1) à (3), peuvent être transformées en contraintes d'égalité en introduisant les variables d'écart $e_1, e_2, e_3 \geq 0$ comme suit

$$2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - e_1 = 7 \tag{1}$$
$$8x_1 - 5x_3 + 3x_4 + e_2 = 8 \tag{2}$$
$$-2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + e_3 = -6 \tag{3}$$

Les contraintes (4) à (7) ne peuvent pas être transformées aussi facilement. Nous nous intéressons maintenant à chacune de ces contraintes en détail.

La contrainte (4), $1 \leq x_1 \leq 4$, correspond aux deux contraintes suivantes

$$x_1 \geq 1$$
$$x_1 \leq 4$$

Afin d'obtenir des contraintes d'égalité, on introduit deux nouvelles variables d'écart, $e_4, e_5 \geq 0$ comme suit

$$x_1 - e_4 = 1, \tag{4a}$$
$$x_1 + e_5 = 4. \tag{4b}$$

Notons que la contrainte $x_1 - e_4 = 1$ rend la contrainte de non-negativité sur x_1 redondante. En effet puisque $e_4 \geq 0$, $x_1 = e_4 + 1$ est forcément ≥ 0. Attention toutefois qu'en forme standard, toutes les variables doivent être positives. Même si c'est redondant.

Nous allons voir qu'il est également possible d'écrire la contrainte $1 \leq x_1 \leq 4$ sous forme d'égalité en n'utilisant qu'une seule variable d'écart et ce grâce à un changement de variable. Cette méthode a l'avantage d'éviter d'avoir une contrainte redondante. Les deux méthodes sont valides.

Le changement de variable est le suivant : $x_1' = x_1 - 1$. Si on change la variable x_1 de cette manière, la contrainte d'égalité supérieure, c'est-à-dire $x_1 \geq 1$, devient $x_1' + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x_1' \geq 0$. Nous nous retrouvons donc avec une contrainte de non-négativité pour x_1'. Il ne nous reste plus que la contrainte d'inégalité inférieure, c'est-à-dire $x_1 \leq 4$, qui devient $x_1' + 1 \leq 4 \Leftrightarrow x_1' \leq 3$. On introduit maintenant la variable d'écart $e_6 \geq 0$ afin de transformer cette contrainte en une contrainte d'égalité et on obtient :

$$x_1' + e_6 = 3 \tag{4}$$

Nous voyons donc qu'avec cette méthode, nous n'utilisons qu'une seule variable d'écart. Si vous utilisez cette méthode, il ne faut pas oublier de remplacer x_1 dans la fonction objectif ainsi que dans toutes les contraintes. Pour la suite de la résolution de l'exercice, nous utiliserons les deux variables d'écart e_4 et e_5.

Pour la contrainte (5), $x_2 \geq -3$, nous passons par un changement de variable. Pour cela, nous définissons une nouvelle variable $x_2' \geq 0$ comme

$$x_2' = x_2 + 3.$$

La contrainte de non-négativité sur x_2' assure bien que $x_2 \geq -3$.

Pour la contrainte (6), $x_3 \in \mathbb{R}$, nous passons par deux nouvelles variables $x_3^+ \geq 0$ et $x_3^- \geq 0$, représentant respectivement la partie positive et négative de x_3. Le changement de variable à opérer est donc simplement

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-.$$

La contrainte (6) peut donc être remplacée par les contraintes de non-négativité sur x_3^+ et x_3^-.

Finalement, pour la contrainte (7), $x_4 \leq 0$, nous passons par une nouvelle variable $x_4' \geq 0$ et le changement de variable à opérer est simplement

$$x_4' = -x_4$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_2 par $(x_2' - 3)$, x_3 par $(x_3^+ - x_3^-)$, et x_4 par $-x_4'$ dans la fonction objectif et à rassembler l'ensemble des contraintes d'égalité et de non-négativité définies ci-dessus. Le problème en forme standard s'écrit donc comme :

$$\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 - 5(x_2' - 3) + 7(x_3^+ - x_3^-) - 4(-x_4') \\
\text{s.c.} \quad & 2x_1 + 4(x_2' - 3) - 6(x_3^+ - x_3^-) - e_1 = 7 && (1) \\
& 8x_1 - 5(x_3^+ - x_3^-) + 3(-x_4') + e_2 = 8 && (2) \\
& -2(x_2' - 3) - 5(x_3^+ - x_3^-) + 4(-x_4') + e_3 = -6 && (3) \\
& x_1 - e_4 = 1 && (4a) \\
& x_1 + e_5 = 4 && (4b) \\
& x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, x_4', e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 - 5x_2' + 7x_3^+ - 7x_3^- + 4x_4' + 15 \\
\text{s.c.} \quad & 2x_1 + 4x_2' - 6x_3^+ + 6x_3^- - e_1 = 19 && (1) \\
& 8x_1 - 5x_3^+ + 5x_3^- - 3x_4' + e_2 = 8 && (2) \\
& -2x_2' - 5x_3^+ + 5x_3^- - 4x_4' + e_3 = -12 && (3) \\
& x_1 - e_4 = 1 && (4a) \\
& x_1 + e_5 = 4 && (4b) \\
& x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, x_4', e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Solution de la question 2:

1. Le problème P s'écrit sous forme standard ainsi :

$$\min -3x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

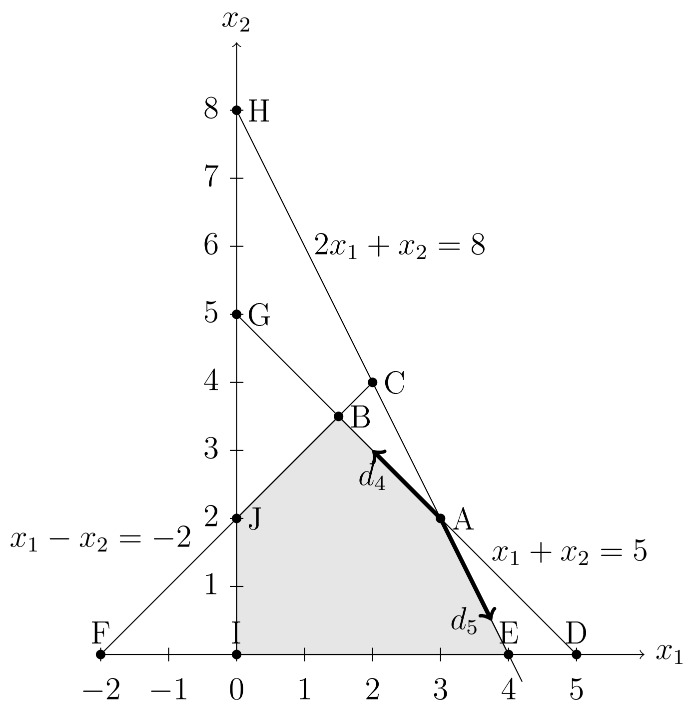
Les variables x_3, x_4 et x_5 sont les variables d'écart. Ce qui donne sous forme matricielle :

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} | Ax = b, x \geq 0 \right\},$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix},$$

2. Représentation graphique :



3. Chaque solution de base est obtenue en sélectionnant 3 variables parmi 5 pour être en base. Ce qui correspond à 10 choix possibles de selection des variables de base. La matrice $B = (A_{j1}, ..., A_{jm})$ est composée des colonnes $j_1, ..., j_m$ de la matrice A. D'autre part, les contraintes actives en une solution x^* sont les contraintes pour lesquelles on a $g_i(x^*) = 0$. L'ensemble des solutions de base est donc :
   — La solution de base qui correspond aux variables de base x_1, x_2 et x_3 ($j_1 = 1$,$j_2 = 2$,$j_3 = 3$).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   La solution de base $x^T = (3, 2, 3, 0, 0)$ est **admissible** et elle correspond au point A$(3, 2)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (2) et la contrainte (3). En effet, $x_4 = 0$ et $x_5 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_1, x_2 et x_4 ($j_1 = 1$,$j_2 = 2$,$j_3 = 4$).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$

La solution de base $x^T = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0)$ est **admissible** et elle correspond au point B$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (1) et la contrainte (3). En effet, $x_3 = 0$ et $x_5 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_1, x_2 et x_5 ($j_1 = 1$,$j_2 = 2$,$j_3 = 5$).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

La solution de base $x^T = (2, 4, 0, 0, -1)$ est **non admissible** car $B^{-1}b \ngeq 0$ et elle correspond au point C$(2, 4)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (1) et la contrainte (2). En effet, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_1, x_3 et x_4 ($j_1 = 1$,$j_2 = 3$,$j_3 = 4$).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

La solution de base $x^T = (5, 0, 7, -2, 0)$ est **non admissible** car $B^{-1}b \ngeq 0$ et elle correspond au point D$(5, 0)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (3) et la contrainte (5). En effet, $x_5 = 0$ et $x_2 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_1, x_3 et x_5 ($j_1 = 1$,$j_2 = 3$,$j_3 = 5$).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La solution de base $x^T = (4, 0, 6, 0, 1)$ est **admissible** et elle correspond au point E$(4, 6)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (2) et la contrainte (5). En effet, $x_4 = 0$ et $x_2 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_1, x_4 et x_5 ($j_1 = 1$,$j_2 = 4$,$j_3 = 5$).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La solution de base $x^T = (-2, 0, 0, 12, 7)$ est **non admissible** car $B^{-1}b \not\geq 0$ et elle correspond au point F$(-2, 0)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (1) et la contrainte (5). En effet, $x_3 = 0$ et $x_2 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_2, x_3 et x_4 ($j_1 = 2$,$j_2 = 3$,$j_3 = 4$).

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La solution de base $x^T = (0, 5, -3, 3, 0)$ est **non admissible** car $B^{-1}b \not\geq 0$ et elle correspond au point G$(0, 5)$ sur la figure.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_2, x_3 et x_5 ($j_1 = 2$,$j_2 = 3$,$j_3 = 5$).

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

La solution de base $x^T = (0, 8, 0, -6, -3)$ est **non admissible** car $B^{-1}b \not\geq 0$ et elle correspond au point H$(0, 8)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (2) et la contrainte (4). En effet, $x_4 = 0$ et $x_1 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_2, x_4 et x_5 ($j_1 = 2$,$j_2 = 4$,$j_3 = 5$).

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La solution de base $x^T = (0, 2, 0, 6, 3)$ est **admissible** et elle correspond au point J$(0, 2)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (1) et la contrainte (4). En effet, $x_3 = 0$ et $x_1 = 0$.

— La solution de base qui correspond aux variables de base x_3, x_4 et x_5 ($j_1 = 3$,$j_2 = 4$,$j_3 = 5$).

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La solution de base $x^T = (0, 0, 2, 8, 5)$ est **admissible** et elle correspond au point I$(0, 0)$ sur la figure. Les contraintes actives en cette solution sont la contrainte (4) et la contrainte (5). En effet, $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.

4. Considérons la solution de base admissible $x^T = (3, 2, 3, 0, 0)$ correspondant au point A. La matrice de permutation P correspondante à cette solution de base est la matrice identité. On a donc les directions de base suivantes en x :
   — la direction de base correspondante à la variable hors base x_4 :

$$d_4 = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

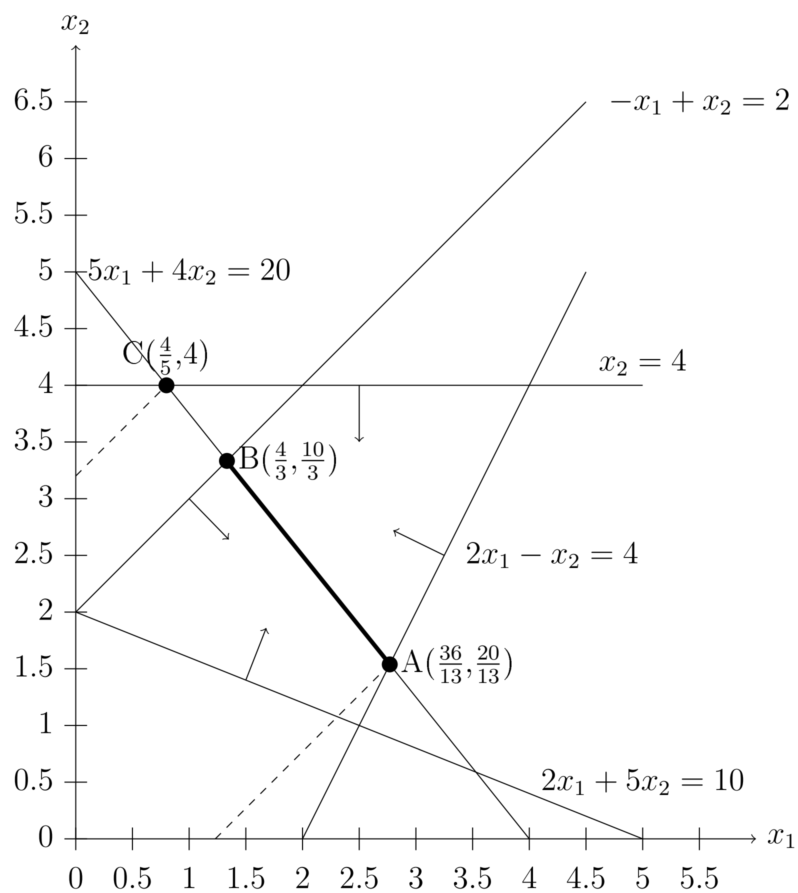
   — la direction de base correspondante à la variable hors base x_5 :

$$d_5 = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux directions sont représentées sur le graphe à partir du point A.
La solution de base admissible $x^T = (3, 2, 3, 0, 0)$ étant non dégénérée, toutes ses directions de base sont admissibles.

Solution de la question 3:

1. Représentons le domaine réalisable du problème pour $b = 2$:



   Le domaine réalisable est le segment [A, B].

2. La solution optimale se trouve sur un sommet du polytope. Lorsque $b = 2$, on a 2 sommets $A(\frac{36}{13}, \frac{20}{13})$ et $B(\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$. Calculons la valeur de la fonction objectif dans chacun de ces points.

(a) $f_A = -x_{1A} - x_{2A} = -\frac{56}{13}$

(b) $f_B = -x_{1B} - x_{2B} = -\frac{14}{3}$

Le point $B(\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ corresponds donc à la solution optimale du problème.

3. Si on considère les contraintes du problème en soustrayant la dernière contrainte $-x_1 + x_2 \leq b$, le domaine réalisable correspond au segment [A,C] avec $A(\frac{36}{13}, \frac{20}{13})$ et $C(\frac{4}{5}, 4)$. La dernière contrainte possède une intersection avec le segment [A,C] pour toute valeur de b entre $-16/13$ et 3.2. La dernière contrainte est représentée en pointillés pour ces deux valeurs extrêmes. Deux cas se présentent :
   - Si $b > 3.2$ alors la dernière contrainte est redondante et l'ensemble des solutions optimales est le segment [A,C].
   - Si $b < -16/13$ alors le domaine admissible est vide.

   Le problème n'admet donc pas de solution pour :
$$b \in]-\infty, -\frac{16}{13}[$$

Solution de la question 4:

1. Nous savons qu'une solution optimale se trouve au niveau de l'un des sommets du domaine admissible. Nous commençons donc par énumérer toutes les solutions de base. Pour cela, nous écrivons le problème sous la forme standard.
$$\min -x_1 - cx_2$$
   sous contraintes
$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 1 \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i \in 1, \dots, 4 \end{aligned}$$
   On a donc
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Notons que le nombre de variable est $n = 4$ et que le nombre de contraintes est $m = 2$. Nous considérons donc toutes les sous matrices $B_{(2,2)}$ de la matrice A.

- Pour $B(A_1, A_2)$, on a $det(B) = -1$ donc la matrice B est inversible et la solution associée est $X^t = (1, 1-a, 0, 0)$. Notons A le point correspondant à cette solution. La valeur de la fonction objectif en ce point est $f_A = -1 - c + ca$.
- Pour $B(A_1, A_3)$, on a $det(B) = -1$ donc la matrice B est inversible et la solution associée est $X^t = (1, 0, 1-a, 0)$. Notons B le point correspondant à cette solution. La valeur de la fonction objectif en ce point est $f_B = -1$.
- Pour $B(A_1, A_4)$, on a $det(B) = a$ donc la matrice B est inversible si $a \neq 0$ et la solution associée est $X^t = (\frac{1}{a}, 0, 0, 1 - \frac{1}{a})$. Notons C le point correspondant à cette solution. La valeur de la fonction objectif en ce point est $f_C = -\frac{1}{a}$.
- Pour $B(A_2, A_3)$, on a $det(B) = 0$ donc la matrice B est non inversible et il n'y a pas de solution correspondante à cette base.
- Pour $B(A_2, A_4)$, on a $det(B) = 1$ donc la matrice B est inversible et la solution associée est $X^t = (0, 1, 0, 1)$. Notons D le point correspondant à cette solution. La valeur de la fonction objectif en ce point est $f_D = -c$.
- Pour $B(A_3, A_4)$, on a $det(B) = 1$ donc la matrice B est inversible et la solution associée est $X^t = (0, 0, 1, 1)$. Notons E le point correspondant à cette solution. La valeur de la fonction objectif en ce point est $f_E = 0$.

Pour avoir une solution de base dégénérée, il faut qu'au moins une variable de base soit nulle. Si on choisit $a = 1$, les points A, B et C correspondent à la même solution dégénérée $X^t = (1, 0, 0, 0)$. Pour que cette solution soit l'unique solution optimale, il faut que $f_A < f_D$ et $f_A < f_E$. On peut donc déduire que $c < 1$.

Ainsi, pour avoir une unique solution optimale dégénérée, il faut avoir $a = 1$ et $c < 1$.

2. Pour avoir une infinité de solutions optimales, il faut que la fonction objectif soit parrallèle à l'une des contraintes du problème.
   - la fonction objectif est parallèle à la première contrainte si elles ont le même coefficient directeur. Le coefficient directeur de la fonction objectif est $\frac{-1}{c}$. Le coefficient directeur de la première contrainte est $-a$. On doit donc avoir

$$-a = \frac{-1}{c} \rightarrow ac = 1.$$

Les points A, C et $D \in$ la droite représentant la première contrainte $ax_1 + x_2 = 1 \leftrightarrow x_3 = 0$. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall c \in \mathbb{R}$, le point D est admissible et donc $\in$ à l'ensemble des solutions optimales.

- si $a < 1 \rightarrow$ le point C n'est pas admissible (car $1 - 1/a < 0$ si $0 < a < 1$ et $1/a < 0$ si $a < 0$). Le point A est admissible (car $1-a > 0$ si $a < 1$). L'ensemble des solutions optimales est donc [AD] si $c > 1$. Ce qui est le cas si $0 < a < 1$ puisque $ac = 1$ (Si $a < 0$ la solution optimale serait le point B puisqu'il est admissible et que $f_B = -1$).
- si $a > 1 \rightarrow$ le point A n'est pas admissible (car $1 - a < 0$). Le point C est admissible (car $1 - 1/a > 0$ et $1/a > 0$ si $a > 1$). L'ensemble des solutions optimales est donc [CD] si $c = 1$. En effet, B n'est pas admissible et $f_C = f_D = \frac{-1}{a} < 0$.
- si $a = 1$ alors A, C et B correspondent au même point admissible $X^t = (1, 0, 0, 0)$. L'ensemble des solutions optimales est [AD]. En effet, $f_A = f_D = -1 < f_E = 0$.

— la fonction objectif est parallèle à la deuxième contrainte si $c = 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions optimales serait le segment [AB]. Pour que les deux points A et B soient admissibles, il faut que toutes leurs variables de décision soient positives $\leftrightarrow a < 1$ (si $a = 1$, alors A et B correspondent à la même solution dégénérée).

Ainsi, le problème admet une infinité de solution si :

$(ac = 1$ et $a > 0)$ ou $(c = 0$ et $a < 1)$

Solution de la question 5:

On peut avoir une direction de base non admissible en une solution de base admissible x si elle est dégénérée.

Pour le montrer, rappelons le théorème 3.13 qui stipule qu'une direction d est admissible en un point admissible x ssi :

- $Ad = 0$, et
- $d_i \geq 0$ si $x_i = 0$.

Soit k l'indice d'une variable hors base choisi arbitrairement. Et soit d_k la k^{eme} direction de base en x. Selon la definition 3.42 (Direction de base), on a $Ad_k = 0$. De plus, les composantes de d_k correspondantes au variables hors base de x (qui sont nulles) sont par définition positives. Ainsi, si x est une

solution non dégénérée alors toutes les directions de base sont admissibles d'après le théorème 3.13.
Cependant, si x est une solution de base dégénérée alors au moins l'une de ses variables de base est nulle. Soit j l'indice de cette variable. La composante correspondante d_{kj} peut être négative (car rien n'assure qu'elle soit positive). Ainsi, la deuxième condition du théorème 3.13 n'est pas forcément satisfaite. Par conséquent, d_k n'est pas forcément une direction admissible de base.

Solution de la question 6:

Nous donnons ici un exemple de problème d'optimisation linéaire avec une infinité de solution dans chacun des cas suivant :

(a) 0 sommet optimal : Soit le problème linéaire sans contraintes suivant :

$$\min f(x) = c.$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et c une constante.

L'ensemble des solutions optimales est $\mathbb{R}$ et il n' y a aucun sommet optimal.

(b) 1 sommet optimal :

Soit le problème linéaire suivant :

$$\min f(x) = x_1.$$

s.c :

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$

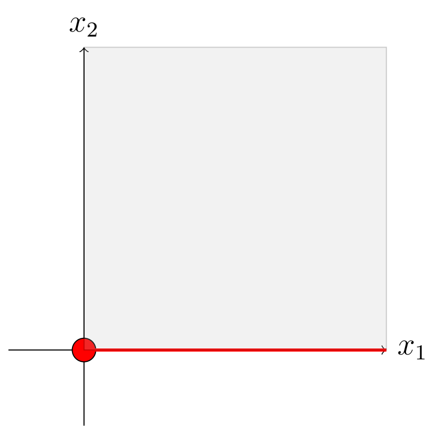
Il existe une infinité de solutions optimales qui correspondent à l'ensemble

$$\{x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+ | \begin{pmatrix} 0 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T\}.$$

Et il existe une seule solution de base optimale qui correspond au vecteur nul.

Afin d'illustrer notre propos, considérons le cas où $n = 2$.

La figure ci-dessous représente le domaine admissible en gris. L'ensemble des solutions optimales est représenté en rouge. On peut constater qu'il existe un unique sommet qui correspond au vecteur nul.



(c) 2 sommet optimaux :

Soit le problème linéaire suivant :

$$\min f(x) = x_1 + x_2.$$

s.c :

$$2x_1 + 2x_2 \geq 4 \quad (1)$$
$$x_1 \geq 0 \quad (2)$$
$$x_2 \geq 0 \quad (3)$$

La première contrainte étant parallèle à la fomction objectif, l'ensemble des solutions optimales est le segment $[A, B]$ avec $A(2, 0)$ et $B(0, 2)$.

La figure ci-dessous représente le domaine admissible en gris. L'ensemble des solutions optimales est représenté en rouge. On peut constater qu'il existe deux sommets optimaux $A(2, 0)$ et $B(0, 2)$.