1 Exemple

Commencer avec l'exemple B& B

2 Modélisation

Problème d'ordonnancement. Plusieurs tâches doivent être efffectuées par une machine.

Pour chaque tâche i :

- Durée de traitement : p_i
- Disponibilité : r_i
- Deadline : d_i

On veut terminer toutes les tâches le plus tôt possible.

Variables:

- Début de la tâche i: x_i
- Fin de la tâche i: $x_i + p_i$
- Fin des travaux: z

Fonction objectif:

$$\min z$$

Contraintes :

- Les tâches commencent après le début de la journée :

$$x_i \geq 0$$

- Toutes les tâches doivent être terminées avant z:

$$x_i + p_i \leq z, \forall i.$$

- Tâche ne peut commencer avant qu'elle ne soit disponible

$$x_i \geq r_i, \forall i.$$

- Tâche doit être finie avant le deadline

$$x_i + p_i \leq d_i, \forall i.$$

- Deux tâches ne peuvent être effectuées en même temps. Soit

$$x_i + p_i \leq x_j$$

soit

$$x_j + p_j \leq x_i$$

Théorie : soit $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$. Une des deux contraintes $f(x) \geq a$ et $g(x) \geq b$ doit être vérifiée. On introduit z binaire, et on impose

$$f(x) \geq az \text{ et } g(x) \geq b(1-z)$$

  - $y_{ij} = 1$ si tâche i est effectuée avant tâche j.
  - $y_{ij} + y_{ji} = 1$
  - Si $y_{ij} = 1$ alors

$$x_i + p_i \leq x_j$$
$$x_j - x_i - p_i \geq 0$$

  - Si $y_{ij} = 0$ alors

$$x_j + p_j \leq x_i$$
$$x_i - x_j - p_j \geq 0$$

Intervalles : soit D le dernier deadline. Soit

$$P_{min} = \min_i p_i \text{ et } P_{max} = \max_i p_i$$

$$\begin{aligned} p_i &\in [P_{min}, P_{max}] \\ x_i &\in [0, D - P_{min}] \\ x_i + p_i &\in [P_{min}, D] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x_j - (x_i + p_i) &\geq -D \\ x_j - (x_i + p_i) + D &\geq 0 \end{aligned}$$

Définissons

$$f(x) = x_j - (x_i + p_i) + D \geq 0$$
$$g(x) = x_i - (x_j + p_j) + D \geq 0$$

Contrainte 1:

$$x_i + p_i \leq x_j \text{ equivalent à } f(x) \geq a = D$$

Contrainte 2:

$$x_j + p_j \leq x_i \text{ equivalent à } g(x) \geq b = D$$

$$f(x) \geq az \text{ et } g(x) \geq b(1 - z)$$

$$f(x) = x_j - (x_i + p_i) + D \geq Dy_{ij}$$
$$g(x) = x_i - (x_j + p_j) + D \geq D(1 - y_{ij})$$

ou encore

$$x_j + D(1 - y_{ij}) \geq x_i + p_i$$
$$x_i + Dy_{ij} \geq x_j + p_j$$

3 Ensemble admissible entier

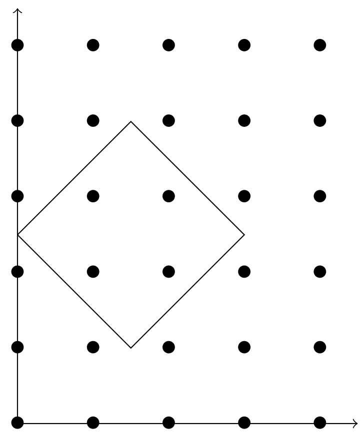
Considérer les problèmes d'optimisation suivants, où $x, y \in \mathbb{Z}$ sont des variables entières.

Problème 1 :

$$\min x + y$$

sous contraintes

$$x + 2.5 \geq y \tag{1}$$
$$-x + 5.5 \geq y \tag{2}$$
$$x - 0.5 \leq y \tag{3}$$
$$-x + 2.5 \leq y \tag{4}$$

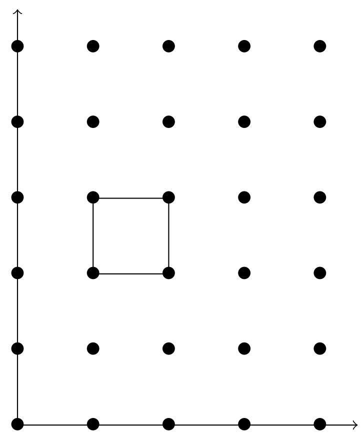


Problème 2 :

$$\min x + y$$

sous contraintes

$$x \geq 1 \tag{5}$$
$$x \leq 2 \tag{6}$$
$$y \leq 3 \tag{7}$$
$$y \geq 2 \tag{8}$$



Problème 3 :

$$\min x + y$$

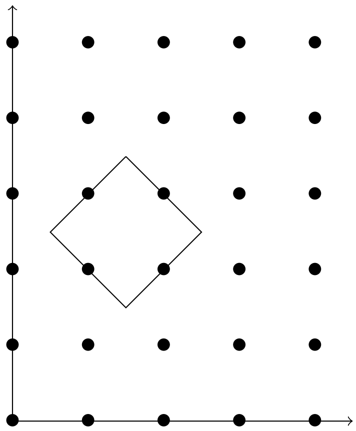
sous contraintes

$$x + 2 \geq y \tag{9}$$

$$-x + 5 \geq y \tag{10}$$

$$-x + 3 \leq y \tag{11}$$

$$x \leq y \tag{12}$$



Problème 4 :

$$\min x + y$$

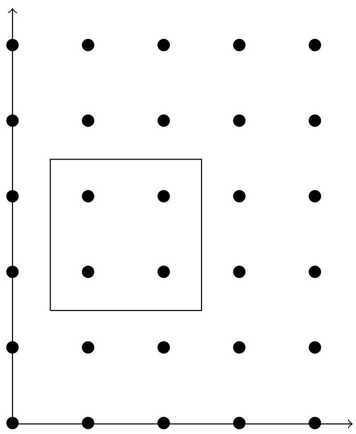
sous contraintes

$$x \geq 0.5 \tag{13}$$

$$x \leq 2.5 \tag{14}$$

$$y \leq 3.5 \tag{15}$$

$$y \geq 1.5 \tag{16}$$



1. Quel problème possède la valeur optimale la plus petite ?