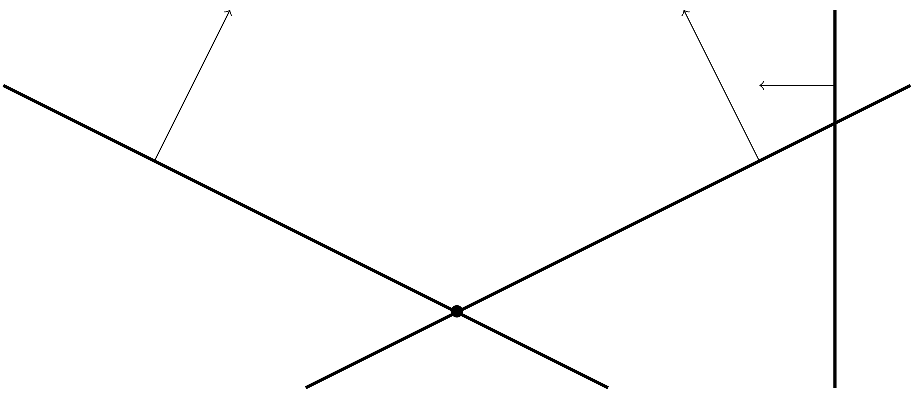
1 Lagrangien

Considérons un problème d'optimisation linéaire en forme standard, avec n variables positives ou nulles, et m contraintes d'égalité. x^* est une solution de base admissible optimale associée à la base B. Considérons aussi son dual. Laquelle de ces affirmation est fausse.

1. ~~La valeur optimale du problème dual est la même que la valeur optimale du problème primal.~~
2. **La solution optimale du problème dual est la même que la solution optimale du problème primal.**
3. ~~Le problème dual implique m variables et n contraintes d'inégalité.~~
4. ~~Si $x_i^* > 0$, la contrainte correspondante du dual est active à la solution.~~

2 Bilan des forces



Problème résolu par la nature :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_2$$

sous contrainte

$$a_i^T x \geq b_i, \; i = 1, 2, 3.$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interprétation des variables duales μ_i^* : force appliquée par la contrainte sur la solution.

A l'équilibre, la somme des forces est nulle.

$$\sum_i \mu_i^* a_i + \nabla(c^T x^*) = 0$$

$$c = -\sum_i \mu_i^* a_i$$

Les contraintes non actives n'exercent aucune force. Donc, soit $\mu_i^* = 0$, soit $a_i^T x^* = b_i$ (écarts complémentaires). Autrement dit:

$$\mu_i^* b_i = \mu_i^* a_i^T x^*, \ \forall i.$$

La valeur du dual

$$(\mu^*)^T b = \sum_i \mu_i^* b_i = \sum_i \mu_i^* a_i^T x^* = c^T x^*.$$

La valeur optimale du dual est la valeur optimale du primal.

3 Dualité non linéaire

Soit le problème d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x^2$$

sous contraintes

$$x \geq 1$$

Soit μ la variable duale telle que $\mu \geq 0$. Quel est le lagrangien de ce problème ? Quelle est la fonction duale ? Quelles sont les solutions optimales du primal et du dual ?

Ecrire d'abord

$$g(x) = 1 - x \leq 0.$$

Lagrangien:

$$L(x, \mu) = x^2 + \mu(1 - x) = x^2 - \mu x + \mu.$$

Dérivées :

$$L'(x, \mu) = 2x - \mu$$
$$L''(x, \mu) = 2$$

Minimum : $x^* = \mu/2$.

Fonction duale :

$$q(\mu) = L(x^*, \mu) = \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \mu\left(\frac{\mu}{2}\right) + \mu = \mu - \frac{\mu^2}{4}.$$

Dérivées :

$$q'(\mu) = 1 - \frac{\mu}{2}$$
$$q''(\mu) = -\frac{1}{2}$$

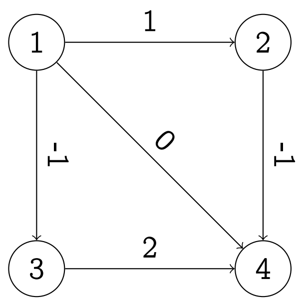
Solution optimale du dual : $\mu^* = 2$.

Valeur optimale du dual : 1.

Solution optimale du primal : $x^* = \mu^*/2 = 1$.

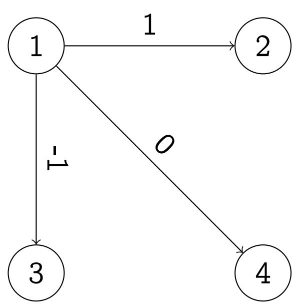
Valeur optimale du primal : 1.

4 PCC

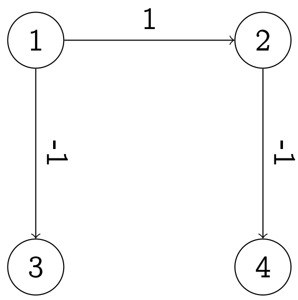


Quel est l'arbre des plus courts chemins ?

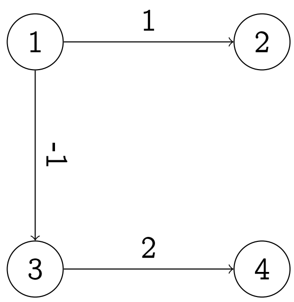
1. Vrai



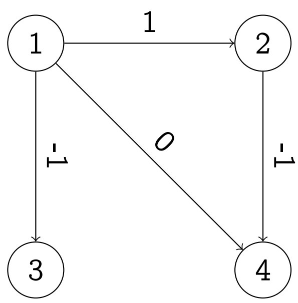
2. Vrai



3. Faux, car le plus court chemin de 1 à 4 est incorrect.



4. Faux. Il s'agit bien des plus courts chemins, mais ce n'est pas un arbre.



5 PCC

Considérons un réseau *fortement* connexe dont tous les arcs ont un coût positif ou nul, sauf un arc qui possède un coût négatif. *Le réseau ne contient pas de cycle à coût négatif.* Nous appliquons l'algorithme de plus court chemin d'un noeud o vers tous les autres noeuds. A chaque itération, nous traitons le noeud associé à la plus petite étiquette. Quelle propriété n'est pas garantie ?

1. ~~L'algorithme termine après un nombre fini d'itérations.~~ Théorème 23.10.

2. ~~Il existe un plus court chemin.~~ Corollary 23.4.

3. **Les étiquettes calculées par l'algorithme sont permanentes.** L'algorithme de Dijkstra et le théorème 23.14 s'appliquent lorsque tous les arcs du réseau ont un coût non négatif. Ce n'est pas le cas ici, et la propriétés des étiquettes permanentes n'est pas garantie.

4. ~~A la fin de l'algorithme, l'étiquette du noeud i correspond à la longueur d'un plus court chemin entre o et i.~~ Théorème 23.11. Toutes les étiquettes sont finies car le réseau est fortement connexe, et tous les noeuds sont donc joignables depuis o.

5. ~~A la fin de chaque itération, si l'étiquette du noeud i est finie, elle correspond à la longueur d'un chemin entre o et i.~~ Théorème 23.9.3.