1 Solution sur un sommet

Considérons un problème d'optimisation linéaire, qui possède au moins une solution optimale. Laquelle de ces affirmations est correcte ?

- **Il existe un sommet du polytope des contraintes qui soit optimal.**
- ~~Une solution optimale est toujours sur un sommet du polytope des contraintes.~~
- ~~Si le problème est écrit en forme standard, il existe un sommet du polytope des contraintes qui soit optimal.~~
- ~~Si le problème est écrit en forme standard, une solution optimale est toujours sur un sommet du polytope des contraintes.~~

2 Solution ailleurs que sur un sommet

Parmi les problèmes d'optimisation suivants, il y en a un qui possède une solution optimale qui ne soit pas un sommet. Lequel ?

1. ~~$\min x$ s.c. $0 \leq x \leq 1$.~~
2. ~~$\min x_1 + x_2,\ x_1, x_2 \geq 0$.~~
3. ~~$\min x_1 + 2x_2$ s.c. $x_1 + 2x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geq 0$.~~
4. $\max x_1 + 2x_2$ **s.c.** $x_1 + 2x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geq 0$.
5. ~~$\max x$ s.c. $0 \leq x \leq 1$.~~
6. ~~$\max x_1 + x_2,\ x_1, x_2 \geq 0$.~~

3 Base dégénérées

Laquelle de ces affirmations est toujours exacte ?

- ~~A chaque sommet correspond exactement une solution de base admissible.~~

- ~~A chaque sommet correspond au plus une solution de base admissible.~~
- **A chaque sommet correspond au moins une solution de base admissible.**

4 Pas

La longueur du pas α dans la direction de base d est déterminée par la condition suivante.

- ~~Le gradient en $x + \alpha d$ est égal à zéro.~~
- ~~$\alpha = 1$.~~
- ~~α est égal au coût réduit associé à d.~~
- **α correspond à la première contrainte activée.**
- ~~α correspond à la dernière contrainte activée.~~
- ~~Il y a $m + 1$ variables de base en $x + \alpha d$.~~
- ~~Il y a $m - 1$ variables de base en $x + \alpha d$.~~

5 Pas - ctd

Supposons que nous ayons une solution de base admissible optimale telle que le coût réduit $\bar{c}_j < 0$. Quel est la longueur du pas dans la direction de base j ?

1. **0,**
2. ~~1,~~
3. ~~$+\infty$,~~
4. ~~Cette situation n'est pas possible.~~

6 Problème non borné

Considérez le problème

$$\max x_1 \text{ s.c. } x_1 + x_2 = 0, x_1, x_2 \geq 0.$$

Ecrire le problème en forme standard et considérer la solution de base admissible avec x_2 comme variable de base.

- **Le coût réduit est négatif et** $\alpha = 0$
- ~~Le coût réduit est négatif et~~ $\cancel{\alpha = 1}$
- ~~Le coût réduit est négatif et~~ $\cancel{\alpha = +\infty}$
- ~~Le coût réduit est positif et on ne doit pas calculer~~ $\cancel{\alpha}$
- ~~Le coût réduit est nul et on ne doit pas calculer~~ $\cancel{\alpha}$

$$A = (1\ 1),\ b = 0\ c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- x_1 en base.

$$\bar{c}_2 = c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 = 0 - (-1)(1)(1) = 1$$

- x_2 en base.

$$\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = -1$$

7 Lecture du tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	-1	1	0	1	0	2
-1	-1	0	-1	0	1	6
0	2	-1	1	0	0	-8

Une seule de ces affirmations est **fausse**

1. ~~x_3 est hors de la base.~~

2. ~~$x_5 = 2$.~~

3. ~~$x_2 = 0$.~~

4. ~~La solution de base admissible n'est pas optimale.~~

5. **La valeur de la fonction objectif est -8.**

6. ~~x_6 est en base.~~

7. ~~Si x_3 entre en base et x_5 sort de la base, la longueur du pas est $\alpha = 2$.~~

8. ~~Si x_3 entre en base, la direction de base est~~

$$d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8 Phase I

A la fin de la Phase I, on obtient le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a & x_3^a & x_4^a & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & x_1 \\
0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & -3/4 & 1/2 & x_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & x_3^a \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & x_3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Quelle opération faut-il effectuer ensuite ?

1. ~~Faire un pivotage pour faire sortir la variable x_3^a de la base.~~

2. ~~Arrêter l'algorithme car le problème original n'est pas admissible.~~

3. ~~Calculer la dernière ligne du tableau pour le problème original.~~

4. **Eliminer la troisième ligne du tableau.**

5. ~~Eliminer les colonnes correspondant aux variables auxiliaires.~~