1 Géométrie des contraintes

Quel est l'objet géométrique caractérisant l'ensemble des contraintes d'un problème d'optimisation linéaire ?

1. ~~un hyperplan~~,
2. **un polytope,**
3. ~~une droite~~,
4. ~~un cône~~.

2 Forme standard

Soit le problème d'optimisation linéaire

$$\max x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$3x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 \in \mathbb{R}$$
$$x_2 \geq 0$$

Parmi les problèmes ci-dessous, lequel est la version en forme standard ?

1. Non, car problème de maximisation. De plus, x_1 doit pouvoir prendre des valeurs négatives.

$$\max x_1 + x_2$$

sous contraintes

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

2. Oui. La variable $x_1 \in \mathbb{R}$ du problème original a été remplacée par $x_1 - x_4$, avec x_1, $x_4 \geq 0$

$$\min -x_1 - x_2 + x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 10\\ x_1 &\geq 0\\ x_2 &\geq 0\\ x_3 &\geq 0\\ x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

3. Non. x_1 doit pouvoir prendre des valeurs négatives.

$$\min -x_1 - x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + x_3 &= 10\\ x_1 &\geq 0\\ x_2 &\geq 0\\ x_3 &\geq 0\\ x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

4. Non. A l'exception des contraintes de non négativité, toutes les contraintes doivent être des contraintes d'égalité.

$$\min -x_1 - x_2 + x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 10\\ x_1 &\geq 0\\ x_2 &\geq 0\\ x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

3 Variables de base

Problème :

$$\max x_1$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 1\\ x_2 &\leq 2\\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Combien de variables possède le problème en forme standard.

Forme standard :

$$\min -x_1$$

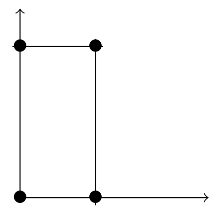
sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nombre de variables : $n = 4$. Nombre de contraintes : $m = 2$.

Combien de sommets possède le polytope des contraintes ?



Il y a 4 sommets. Mais le nombre de bases possibles est

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6.$$

Pourquoi n'y a-t-il pas 6 sommets ?

1. **Parce les contraintes sont parallèles.** D'un point de vue algébrique, le choix des variables x_1 et x_3 en base, ou des variables x_2 et x_4, correspond à une matrice de base B singulière. Il ne s'agit donc pas d'une base valide.

2. ~~Parce que le problème est dessiné en forme canonique et pas en forme standard.~~

3. ~~Parce qu'il ne peut pas y avoir plus de deux contraintes actives par variable.~~

4. ~~Parce que les deux autres bases sont dégénérées.~~

5. ~~Parce que les deux autres bases sont non admissibles.~~

Considérez $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$. Il s'agit d'une solution

- ~~non admissible~~,
- **admissible, non optimale**
- ~~optimale~~.

Considérez $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$. Il s'agit d'une solution

- ~~non admissible~~,
- ~~admissible, non optimale~~
- **optimale**.

Considérez $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$. Il s'agit d'une solution

- ~~non admissible,~~
- ~~admissible, non optimale~~,
- **optimale**.

Pourtant, cette dernière solution n'est pas un sommet ! Il peut y avoir des solutions optimales qui ne soient pas des sommets. Par contre, s'il existe des solutions optimales, il existe toujours au moins un sommet optimal.

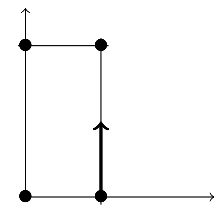
Considérez x_1 et x_4 en base : $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$. Le coût réduit associé à x_2 est

- ~~positif~~,
- ~~négatif~~,
- **nul**.

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j.$$

$$B = I, c_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{c}_2 = 0.$$



La fonction objectif n'est pas modifiée dans cette direction. La dérivée directionnelle est donc nulle.

Considérez x_1 et x_4 en base : $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$. Le coût réduit associé à x_3 est

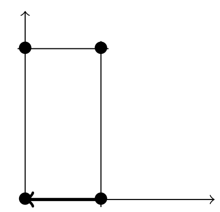
- **positif,**
- ~~négatif~~,
- ~~nul~~.

$$\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = 0 - (-1 \;\; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Interprétation : la fonction objectif monte dans la direction

$$d_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

representée ci-dessous:



Il s'agit bien de la dérivée directionnelle dans la direction d_3. Nous avons

$$f(x) = c^T x = (-1 \; 0 \; 0 \; 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; \nabla f(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\nabla f(x)^T d_3 = (-1\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Notez que ce coût réduit ne peut pas être négatif car nous sommes à une solution de base admissible optimale, et la base n'est pas dégénérée.

Attention : ces interprétations sont valables dans le contexte de la minimisation. Mais une interprétation similaire peut être effectuée dans le contexte de la maximisation (pour la formulation originale du problème). Dans ce cas, la solution est un **maximum** et la fonction *descend* dans la direction en question. La dérivée directionnelle est donc négative :

$$f(x) = c^T x = (1\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\nabla f(x)^T d_3 = (1\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

4 Coût réduits

Considérer la condition "Les coûts réduits sont tous positifs". S'agit-il d'une condition suffisante et/ou nécessaire d'optimalité ?

- ~~suffisante et nécessaire~~,
- **suffisante et pas nécessaire**,
- ~~pas suffisante mais nécessaire~~,
- ~~ni suffisante ni nécessaire~~.

La condition est suffisante et nécessaire si la base est non dégénérée.