Algorithme du simplexe (13 octobre 2017)

Question 1:

On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min -2x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 & (1)\\ -x_1 + 2x_2 &\leq 3 & (2)\\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Représenter graphiquement le domaine admissible.
2. Identifier l'ensemble des valeurs admissibles lorsque les contraintes (1) et (2) sont actives.
3. Identifier graphiquement toutes les solutions de base.
4. Identifier graphiquement toutes les solutions de base admissibles.
5. Identifier, à l'aide de la méthode graphique, la solution optimale.

Question 2:

On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_5$$

sous contraintes

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & & & = & 7\\ & & -2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & & & & & = & 12\\ & & -4x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 10\\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Supposons que les indices de base soient 2,3, et 6.

1. Calculer la solution de base associée. Est-elle admissible ?
   Hint : vous pouvez trouver l'inverse de quelques matrices en annexe.
2. Calculer les coûts réduits des variables hors base. Que peut-on en déduire ?

Question 3:

Considérer le problème d'optimisation linéaire

$$\min -x_1 - 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Représenter graphiquement le domaine admissible.
2. Ecrire le problème en forme standard.
3. Résoudre le problème par la méthode algébrique du simplexe. A chaque itération, préciser
   (a) les variables en base ;
   (b) l'itéré courant (analytiquement et graphiquement) ;
   (c) la direction de base empruntée par l'algorithme (analytiquement et graphiquement) ;
   (d) la longueur du pas effectué le long de la direction de base.

   Hint : Vérifier que le point (0,0) est une solution de base admissible. Si c'est le cas, vous pouvez commencer l'algorithme en partant de ce point.

Question 4:

Quelle est la solution de base admissible associée à ce tableau du simplexe ?

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	4	1	0	5	5
	0	1	3	1	2	6
	0	2	3	0	5	-11

1. $x_1 = 5, x_2 = 6, x_3, s_1, s_2 = 0$
2. $x_3 = 5, s_1 = 6, x_1, x_2, s_2 = 0$
3. $x_3 = 5, x_2 = 6, x_1, s_1, s_2 = 0$
4. $x_1 = 5, s_1 = 6, x_2, x_3, s_2 = 0$

Est-ce que ce tableau est optimal ? Quelle est la valeur de la fonction objectif ?

Annexe

— L'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ est $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 3/10 & -2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

— L'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

— L'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ -2/5 & 3/5 & -3/5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.