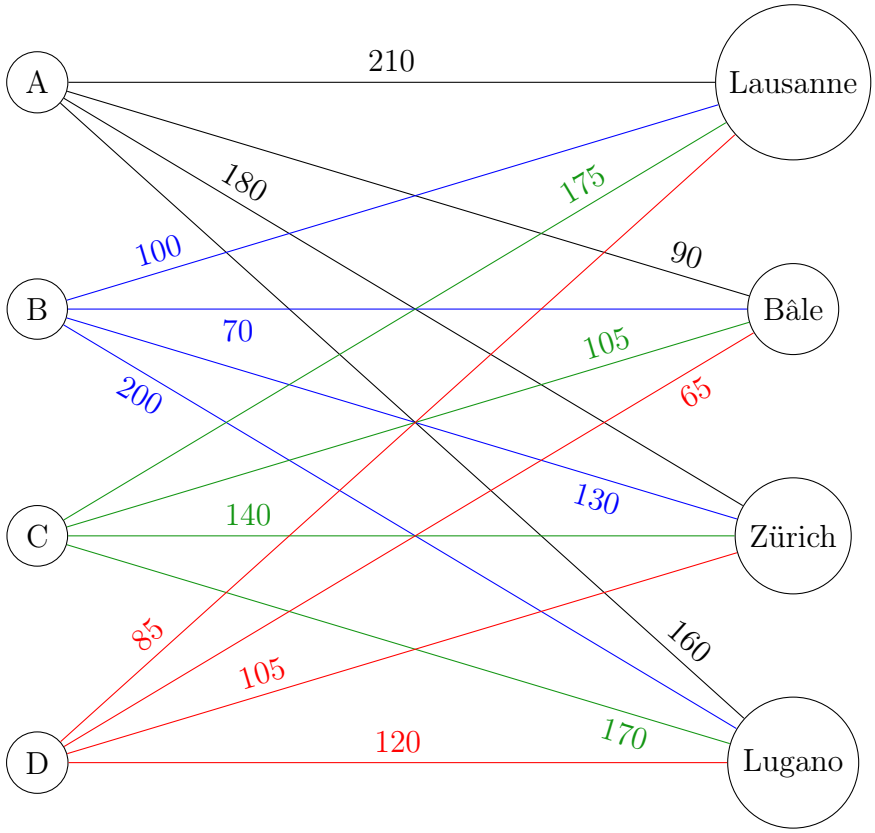
Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2017–2018)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Virginie Lurkin, Nikola Obrenovic

Réseaux et transbordement – corrigé (27 octobre 2017)

Solution de la question 1:

Le problème d'optimisation que nous voulons résoudre consiste à déterminer comment affecter les équipes d'arbitres aux matchs en minimisant la distance totale parcourue par les arbitres. Afin de modéliser cela comme un problème de transbordement, nous devons représenter ce problème en réseau. Pour cela, nous associons un noeud à chaque équipe d'arbitres et un noeud à chaque match. Dans la figure ci-dessous, les noeuds de gauche,(A, B, C, et D) représentent donc respectivement les quatre équipes d'arbitres, A, B, C, et D et les noeuds de droite (Lausanne, Bâle, Zurich, et Lugano) représentent quant à eux les quatre matchs.



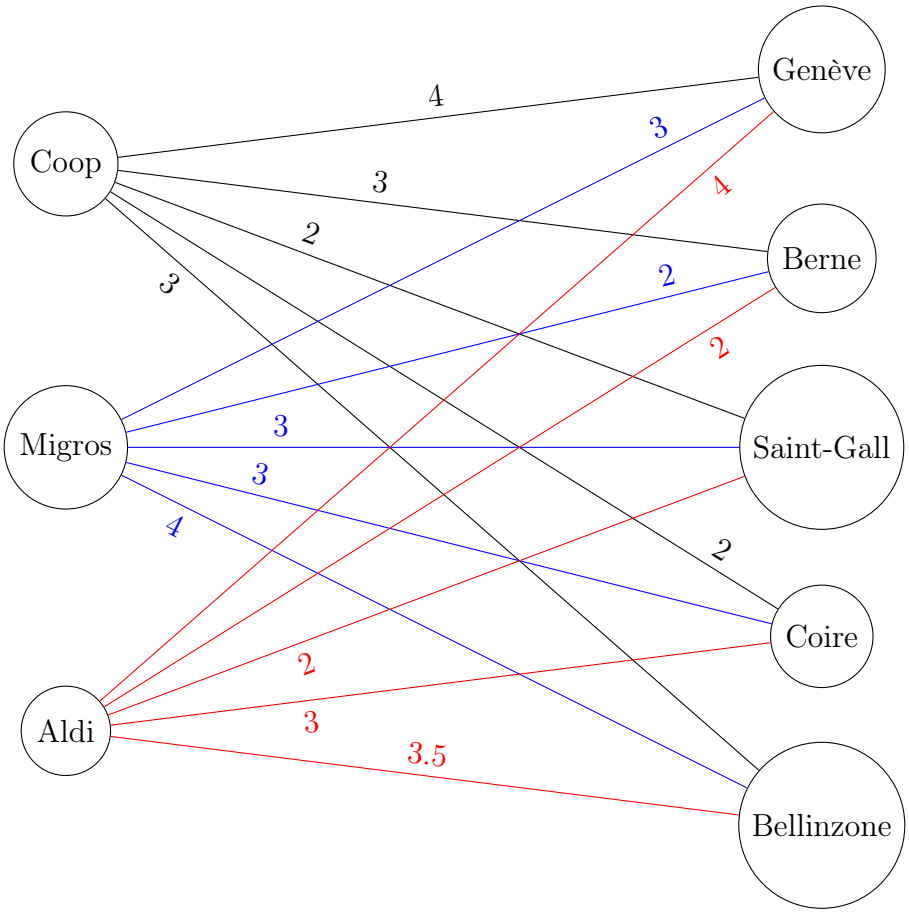
Dans ce réseau, nous associons un arc à chaque affectation possible entre un arbitre et un match. Par exemple, l'arc reliant le noeud A au noeud Lausanne signifie que l'équipe d'arbitres A est associée au match se déroulant

à Lausanne. De la même façon, l'arc reliant le noeud B à Lugano signifie que l'équipe d'arbitres B est associée au match se déroulant à Lugano. Il en va de même pour toutes les affectations possibles. Finalement, un coût est associé à chacun des arcs. Ce coût correspond à la distance parcourue par les arbitres pour se rendre au match. Par exemple, le coût 210 associé à l'arc reliant le noeud A au noeud Lausanne indique la distance à parcourir pour l'équipe d'arbitres A pour se rendre au match de Lausanne.

Solution de la question 2:

1. Le problème d'optimisation que nous voulons résoudre consiste à déterminer comment distribuer les quantités de farine des revendeurs aux boulangeries en minimisant le coût total. Afin de modéliser cela comme un problème de transbordement, nous devons représenter ce problème en réseau. Pour cela, nous associons un noeud à chaque revendeur et un noeud à chaque boulangerie. Dans la figure ci-dessous, les noeuds à gauche représentent les trois revendeurs et les noeuds à droite représentent les cinq boulangeries.

   Dans ce réseau, nous associons un arc à chaque transaction possible entre une boulangerie et un revendeur. Par exemple, l'arc reliant le noeud Aldi au noeud Genève signifie que la boulangerie de Genève achète au revendeur Aldi. Il en va de même pour toutes les transactions possibles. Finalement, un coût est associé à chacun des arcs. Ce coût correspond au prix à payer par la boulangerie pour se faire livrer un kg de farine par le revendeur. Par exemple, le coût 4 associé à l'arc reliant le noeud Coop au noeud Genève indique que cela coûte 4CHF à la boulangerie située à Genève de se faire livrer un kg de farine par le revendeur Coop.



2. On commence par définir les **paramètres** du modèle mathématique (= les données du problème).

   — Soit c_{ij}, $i = 1, \ldots, 3$ et $j = 1, \ldots, 5$, le prix que la boulangerie j doit payer au revendeur i pour un kilogramme de farine. Sous forme matricielle, cela donne :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3.5 \end{pmatrix}$$

   où les c_{ij} représentent les éléments de la matrice $\boldsymbol{C}$.

L'indice i représente donc les revendeurs :

$$\begin{aligned} i = 1 &\Leftrightarrow \text{Coop}, \\ i = 2 &\Leftrightarrow \text{Migros}, \\ i = 3 &\Leftrightarrow \text{Aldi}, \end{aligned}$$

et l'indice j représente les boulangeries :

$$\begin{aligned} j = 1 &\Leftrightarrow \text{Genève} \\ j = 2 &\Leftrightarrow \text{Berne} \\ j = 3 &\Leftrightarrow \text{Saint-Gall} \\ j = 4 &\Leftrightarrow \text{Coire} \\ j = 5 &\Leftrightarrow \text{Bellinzone} \end{aligned}$$

— Soit d_j, $j = 1, \ldots, 5$, la demande de la boulangerie j. Sous forme d'un vecteur, cela donne :

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 250 & 270 & 180 & 130 & 170 \end{pmatrix}^T$$

— Soit s_i, $i = 1, \ldots, 3$, le stock du revendeur i. Sous forme d'un vecteur, cela donne :

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 380 & 200 & 420 \end{pmatrix}^T$$

On définit maintenant les **variables de décision**. Logiquement, elles vont représenter la quantité (en kilogramme) de farine que chaque boulangerie va acheter à chacun des revendeurs.

— Soit x_{ij}, $i = 1, \ldots, 3$ et $j = 1, \ldots, 5$, la quantité de farine que la boulangerie j achète au revendeur i.

Notre but étant de minimiser le coût total, la **fonction objectif** s'écrit

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$$

En effet, le coût total pour une boulangerie est donné en multipliant les quantités achetées auprès de chacun des revendeurs par le prix de

vente du revendeur et en sommant sur tous les revendeurs. Il faut ensuite sommer sur toutes les boulangeries pour obtenir le coût total.

Il nous reste à nous occuper des différentes **contraintes**.

— Le premier ensemble de contraintes stipule que chaque boulangerie doit satisfaire sa demande :

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = d_j, \quad \forall j = 1, \ldots, 5.$$

— Le deuxième ensemble de contraintes stipule que chaque revendeur vend la totalité de son stock :

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = s_i, \quad \forall i = 1, \ldots, 3.$$

— Le troisième et dernier ensemble de contraintes correspond aux contraintes de non-négativité :

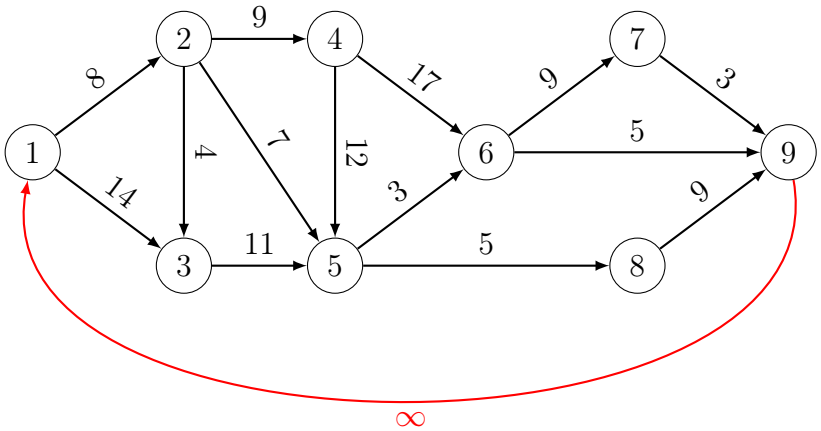
$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, 3; \quad \forall j = 1, \ldots, 5.$$

Le modèle mathématique s'écrit s'écrit donc de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{sous contraintes} & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = d_j, & \forall j = 1, \ldots, 5 \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = s_i, & \forall i = 1, \ldots, 3 \\
& x_{ij} \geq 0, & \forall i = 1, \ldots, 3; \quad \forall j = 1, \ldots, 5
\end{array}$$

Solution de la question 3:

Le problème donné représente un problème de flot maximum. On peut le voir comme un problème de transbordement. Pour cela, il faut ajouter un arc artificiel qui connecte le noeud de destination (9) avec le noeud d'origine (1). Le nouveau réseau est donné par :



Nous rappelons les notations d'un problème de flots :

- Noeuds : i et j.
- Arc : (i,j).
- Capacité sur l'arc (i,j) : c_{ij}.
- Coût unitaire de transport sur l'arc (i,j) : a_{ij}.

Dans le problème qui nous occupe, la matrice des capacités est donné par :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme on peut le voir dans la matrice ci-dessus, beaucoup de capacités sont nulles (l'arc n'existe pas) et il est donc préférable de séléctionner un sous-ensemble de ces arcs ayant une capacité non nulle que l'on va appeler $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est défini par :

$$\mathcal{A} = \{(i,j) | 0 < c_{ij};\ \forall i = 1, \ldots, 9 \text{ and } \forall j = 1, \ldots, 9\}$$

Si on applique cet ensemble à notre problème, on obitent que $\mathcal{A}$ vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \{&(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5),(4,6),\\ &(5,6),(5,8),(6,7),(6,9),(7,9),(8,9),(9,1)\}\,.\end{aligned}$$

Pour un problème de flot maximal, on sait que le coût unitaire a_{ij} vaut 0 pour tous les arcs réels et -1 pour l'arc artificiel, on a donc :

$$a_{91} = -1 \text{ et } a_{ij} = 0, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \setminus (9,1).$$

L'idée centrale est que chaque unité de flot qui réussit à passer à travers le réseau est ramenée artificiellement à (1), en rapportant des bénéfices (coût négatif). Pour cela, on désire une circulation. Une circulation signifie que la divergence, à savoir le bilan des flots en un noeud i, est nulle pour chaque noeud i [1].

Les **variables de décision** représentent donc les flots de marchandise transportée entre deux noeuds et sont définies par :

$$x_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{A}.$$

Le but de ce problème est de maximiser le flot qui part du noeud d'orgine (1) et qui va jusqu'au noeud de destination (9). Pour cela, la **fonction objectif** est définie par :

$$\min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij} x_{ij}$$

Cela revient en effet à minimiser $-x_{9,1}$ et donc bien à maximiser $x_{9,1}$, le flot artificiel entre (9) et (1).

Il nous reste à écrire les **contraintes**.

— Le premier ensemble de contraintes correspond aux capacités des arcs :

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{A}.$$

— Le deuxième ensemble de contraintes guarantit la circulation :

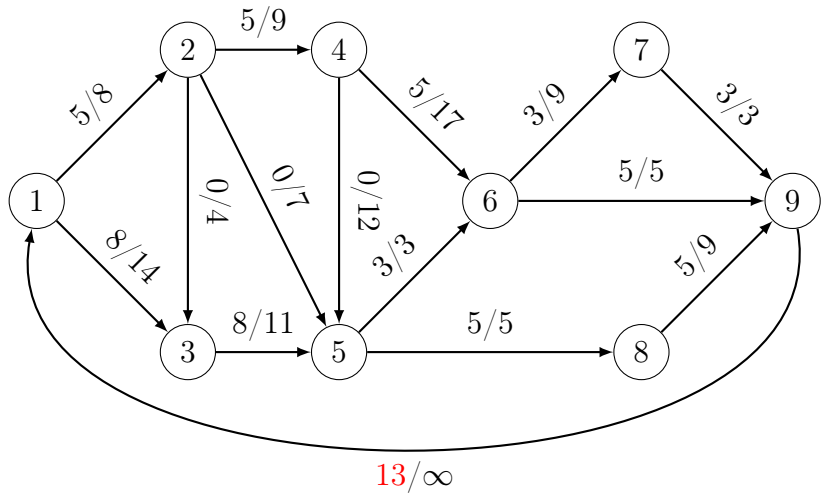
$$\sum_{j|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = 0, \quad \forall i = 1,\ldots,9.$$

1. Pour la définition de la divergence, vous pouvez vous référer au livre section 21.5.3.

Nous pouvons finalement écrire le modèle mathématique comme suit :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} -x_{91} \\
\text{sous contraintes} \quad & 0 \le x_{ij} \le c_{ij}, && \forall (i,j) \in \mathcal{A}, \\
& \sum_{j|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = 0, && \forall i = 1,\ldots,9
\end{aligned}$$

Le problème de flot maximal est un problème d'optimisation linéaire. L'algorithme du simplexe peut donc être utilisé. Il est cependant possible d'exploiter mieux la structure du problème afin d'obtenir un algorithme plus efficace, notamment l'algorithme de Ford-Fulkerson [2]. À titre informatif, voici la solution finale du problème :



Sur les arcs, la première valeur correspond à la quantité optimale de marchandise transportée et la deuxième valeur correspond à la capacité de l'arc. On voit donc que le flot maximum vaut 13 et on peut voir comment ce flot est réparti tout au long du réseau.

2. Nous vous invitons à aller lire le chapitre 24 du livre de référence du cours consacré à ce sujet.