Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin, Nikola Obrenovic

Modélisation – corrigé (22 septembre 2017)

## Solution de la question 1:

1. Afin de déterminer les dimensions optimales de cette nouvelle canette, nous considérons le cylindre $C$. Les variables de décision associées à ce problème sont :
   - $r$, le rayon de la base du cylindre,
   - $h$, la hauteur du cylindre.

   L'objectif étant d'utiliser le moins d'aluminium possible, nous cherchons à minimiser la surface du cylindre. La fonction objectif est donc donnée par

$$\min \quad \underbrace{2\pi r^2}_{\text{fond et dessus}} \quad + \quad \overbrace{2\pi r h}^{\text{partie latérale}}$$

   Nous savons que la canette doit avoir un volume de 0.33 l = 0.33 dm$^3$ = 330 cm$^3$. Pour que la canette remplisse cette condition, nous définissons la contrainte suivante :

$$\pi r^2 h = 330$$

   Le problème d'optimisation est donc :

$$\min \ 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

   sous contraintes

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &= 330 \\ r &\geq 0 \\ h &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure, le problème se formule comme suit :

$$\min \ 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &\leq 330 \\ -\pi r^2 h &\leq -330 \\ -r &\leq 0 \\ -h &\leq 0 \end{aligned}$$

La solution optimale de ce problème est $r = 3.746$ cm et $h = 7.491$ cm.

## Solution de la question 2:

1. Les variables de décision sont
   — $x_1$, le nombre de minutes pour le contenu divertissant.
   — $x_2$, le nombre de minutes pour le contenu éducationel.
   — $x_3$, le nombre de minutes pour le contenu informatif.
   — $x_4$, le nombre de minutes pour la publicité.

   Le problème de maximisation du profit du producteur de télévision s'exprime de la manière suivante :

   $$\max \; -350x_1 + 170x_2 - 90x_3 + 500x_4$$

   sous contraintes

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 210 \\ x_1 &\leq 2x_2 \\ x_4 &\leq 21 \\ x_3 &\geq x_4 \\ x_1, x_2, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

   NB : $x_3 \geq 0$ n'est pas strictement nécessaire car $x_3 \geq x_4$.
   La première contrainte représente le fait que la durée totale de l'émission est de 3 heures et 30 minutes (210 minutes). La deuxième contrainte assure que le temps alloué au contenu divertissant n'est pas deux fois plus important que le temps alloué au contenu éducatif. La troisième

contrainte assure que le temps de publicités ne dépasse pas 21 minutes (c'est-à-dire 10% du temps total de l'émission). Enfin la quatrième contrainte assure que le temps alloué au contenu informatif est au moins égal au temps alloué aux publicités. Les variables de décision sont également toutes strictement non négatives.

2. Sous forme de problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure, on obtient :

$$\min \ 350x_1 - 170x_2 + 90x_3 - 500x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 210 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\leq -210 \\ x_1 &\leq 2x_2 \\ x_4 &\leq 21 \\ -x_3 &\leq -x_4 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -x_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

3. Sous forme de problème de maximisation avec des contraintes d'égalité et des contraintes de non-négativité sur les variables de décision, on obtient :

$$\max \ -350x_1 + 170x_2 - 90x_3 + 500x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 210 \\ x_1 + x_5 &= 2x_2 \\ x_4 + x_6 &= 21 \\ x_3 - x_7 &= x_4 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bien que non demandé dans l'énoncé, il est conseillé d'écrire le problème en rassemblant l'ensemble des variables de décision à gauche du signe d'égalité, comme ceci :

$$\max \ -350x_1 + 170x_2 - 90x_3 + 500x_4$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 210 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 &= 0 \\ x_4 + x_6 &= 21 \\ x_3 - x_4 - x_7 &= 0 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

En résolvant le problème, on obtient que le programme de divertissement doit durer $x_1 = 112$ minutes, que le programme éducationnel doit durer $x_2 = 56$ minutes, tandis que le programme informatif et les publicités doivent durer $x_3 = x_4 = 21$ minutes chacun.

## Solution de la question 3:

1. Les variables de décision sont
   — $x_1$, le nombre de tasses fabriquées chaque jour par Joanna,
   — $x_2$, le nombre d'assiettes fabriquées chaque jour par Joanna.

   Afin de maximiser son revenu hebdomadaire, Joanna doit chercher à maximiser son revenu journalier.

   Le profit de la vente d'une tasse ou d'une assiette est égal au prix de vente de l'objet moins le coût de fabrication de l'objet, à savoir les coûts pour l'utilisation de l'argile et de la couleur. On peut donc écrire la fonction objectif de notre problème comme suit :

$$\max \ (7 - 0.075 \times 10 - 0.04 \times 17)x_1 + (5 - 0.1 \times 10 - 0.11 \times 17)x_2$$

   c'est-à-dire

$$\max \ 5.57x_1 + 2.13x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 1.2x_1 + 0.5x_2 &\leq 8 \\ 0.375x_1 + 0.5x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

La première contrainte limite le nombre de tasses et d'assiettes qui peuvent être fabriquées en 8 heures de travail. La deuxième contrainte limite la quantité d'argile qui peut être utilisée chaque semaine. En effet, Joanna va consommer $0.075x_1+0.1x_2$ kg d'argile par jour. Comme dans une semaine, il y a 5 jours de travail, il faut donc multiplier cette quantité par 5, c'est-à-dire $5 \times (0.075x_1 + 0.1x_2) = 0.375x_1 + 0.5x_2$. La dernière contrainte garantit que le nombre de tasses et d'assiettes créés chaque jour est positif ou nul.

2. Le problème de minimisation avec uniquement des contraintes d'inégalité inférieure s'écrit comme suit :

$$\min \; -5.57x_1 - 2.13x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 1.2x_1 + 0.5x_2 &\leq 8 \\ 0.375x_1 + 0.5x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

3. Le problème de maximisation avec des contraintes d'égalité et des contraintes de non-négativité sur les variables de décision s'écrit comme suit :

$$\max \; 5.57x_1 + 2.13x_2$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} 1.2x_1 + 0.5x_2 + x_3 &= 8 \\ 0.375x_1 + 0.5x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N} \\ x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En résolvant ce problème, on obtient que Joanna doit faire $x_1 = 5$ tasses et $x_2 = 4$ assiettes chaque jour pour maximiser son profit.

## Solution de la question 4:

Nous présentons d'abord les notations utilisées pour les données du problème :

- $d_t$ est la demande du mois $t$, $t = 1, \ldots, 12$, avec la convention que juillet correspond à $t = 1$ (par exemple $d_1 = 4$, $d_2 = 6$).
- $c^+ = 2$ est la pénalité lorsque la production augmente,
- $c^- = 1$ est la pénalité lorsque la production diminue.

Nous définissons les variables de décision suivantes :

- $\ell_t$ : le niveau d'inventaire au début du mois $t$, $t = 1, \ldots, 12$,
- $p_t$ : la production du mois $t$, $t = 0, \ldots, 12$,
- $x_t^+$ : l'augmentation de la production au début du mois $t$, $t = 1, \ldots, 12$ :

  $$x_t^+ = \max(0, p_t - p_{t-1}).$$

  Cette notation signifie que s'il y a une augmentation de la production, c'est-à-dire que $p_t > p_{t-1} \Leftrightarrow p_t - p_{t-1} > 0$, $x_t^+$ sera égal à cette augmentation. Par contre, si la production est stable ou si il y a une diminution, $x_t^+$ sera égal à 0.
- $x_t^-$ : la diminution de la production au début du mois $t$, $t = 1, \ldots, 12$ :

  $$x_t^- = \max(0, p_{t-1} - p_t).$$

  Cette notation signifie que s'il y a une diminution de la production, c'est-à-dire que $p_t < p_{t-1} \Leftrightarrow p_{t-1} - p_t > 0$, $x_t^-$ sera égal à cette augmentation. Par contre, si la production est stable ou si il y a une augmentation, $x_t^-$ sera égal à 0.

En utilisant les définitions de $x_t^+$ et $x_t^-$, on peut facilement déduire qu'en cas de :

- augmentation de la production : $x_t^+ = p_t - p_{t-1} > 0$ et $x_t^- = 0$,
- diminution de la production : $x_t^+ = 0$ et $x_t^- = p_{t-1} - p_t > 0$,

— production stable : $x_t^+ = 0$ et $x_t^- = 0$

La fonction objectif vise à minimiser les coûts encourus par les changements de taux de production. Elle s'exprime donc comme suit :

$$\min \sum_{t=1}^{12} c^+ x_t^+ + \sum_{t=1}^{12} c^- x_t^-.$$

Comme les variables $x_t^+$ et $x_t^-$ sont impliquées dans une minimisation, nous pouvons les définir en utilisant les contraintes d'inégalité suivantes :

$$\begin{aligned} x_t^+ &\geq p_t - p_{t-1}, & t &= 1, \ldots, 12, & (1)\\ x_t^+ &\geq 0, & t &= 1, \ldots, 12. & (2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_t^- &\geq p_{t-1} - p_t, & t &= 1, \ldots, 12. & (3)\\ x_t^- &\geq 0, & t &= 1, \ldots, 12. & (4) \end{aligned}$$

Pour s'assurer que les contraintes (1) et (2) sont équivalentes à la définition de $x_t^+$ et que les contraintes (3) et (4) sont équivalentes à la définition de $x_t^-$, il faut traiter les trois cas séparément pour un seul mois $t$ ($t$ peut valoir $1, 2, \ldots$ ou 12) :

**Augmentation de la production ($\mathbf{p_t > p_{t-1}}$)**

On peut réécrire $p_t > p_{t-1}$ comme $p_t - p_{t-1} > 0$. Grâce à la contrainte (1), on a que $x_t^+ \geq p_t - p_{t-1}$. La contrainte (2) est donc automatiquement satisfaite puisque $x_t^+ \geq p_t - p_{t-1} > 0$. Pour $x_t^-$, on commence par inverser l'inégalité : $p_t - p_{t-1} > 0 \Leftrightarrow p_{t-1} - p_t < 0$. Grâce à la contrainte (4), on a que $x_t^- \geq 0$. La contrainte (3) est donc automatiquement satisfaite puisque $x_t^- \geq 0 > p_{t-1} - p_t$.

On peut maintenant s'occuper seulement des contraintes (1) et (4) :

$$\begin{aligned} x_t^+ &\geq p_t - p_{t-1}\\ x_t^- &\geq 0 \end{aligned}$$

Le but de la fonction objectif est de minimiser les variables $x_t^+$ et $x_t^-$ avec $t \in 1, \ldots, 12$. Les variables $x_t^+$ et $x_t^-$ vont logiquement venir égaler leur borne inférieure. On obtiendra donc que

$$
\begin{aligned}
x_t^+ &= p_t - p_{t-1} \\
x_t^- &= 0
\end{aligned}
$$

Cela correspond donc bien aux définitions originales des variables $x_t^+$ et $x_t^-$.

**Diminution de la production($\mathbf{p_t < p_{t-1}}$)**

En utilisant un raisonnement similaire que pour l'augmentation de la production, on obtient que

$$
\begin{aligned}
x_t^+ &= 0 \\
x_t^- &= p_{t-1} - p_t
\end{aligned}
$$

**Stabilité de la production ($\mathbf{p_t = p_{t-1}}$)**

En utilisant un raisonnement similaire que pour les deux cas précédents, on obtient que

$$
\begin{aligned}
x_t^+ &= 0 \\
x_t^- &= 0
\end{aligned}
$$

Ce cas correspond effectivement au fait qu'il n'y ait pas d'augmentation des coûts par rapport au mois précédent. En effet, $c^+x_t^+ + c^-x_t^- = 0$.

Grâce à ces trois cas, on voit que les contraintes (1) et (2) correspondent effectivement à la définition de $x_t^+$ et que les contraintes (3) et (4) correspondent à la définition de $x_t^-$.

On peut maintenant définir le niveau des stocks au début du mois $t+1$ comme suit

$$
\ell_{t+1} = \ell_t + p_t - d_t, \quad t = 1, \ldots, 11.
$$

Les conditions initiales peuvent être écrites comme

$$
\ell_1 = 1000
$$

et

$$
p_0 = 3000.
$$

Comme le stockage est limité, nous avons

$$\ell_t \leq 12000, \quad t = 1, \ldots, 12$$

Par ailleurs, afin de satisfaire la demande, l'inventaire ne peut pas devenir négatif :

$$\ell_t \geq 0, \quad t = 0, \ldots, 12.$$

En mettant toutes ces contraintes ensemble, le problème s'exprime comme suit :

$$\min \sum_{t=1}^{12} c^+ x_t^+ + \sum_{t=1}^{12} c^- x_t^-.$$

sous contraintes

$$\begin{aligned}
x_t^+ &\geq p_t - p_{t-1}, & t &= 1, \ldots, 12, \\
x_t^- &\geq p_{t-1} - p_t, & t &= 1, \ldots, 12, \\
\ell_{t+1} &= \ell_t + p_t - d_t, & t &= 1, \ldots, 11, \\
\ell_t &\leq 12000, & t &= 1, \ldots, 12, \\
\ell_1 &= 1000, & & \\
p_0 &= 3000, & & \\
\ell_t &\geq 0, & t &= 1, \ldots, 12, \\
p_t &\geq 0, & t &= 0, \ldots, 12, \\
x_t^+ &\geq 0, & t &= 1, \ldots, 12, \\
x_t^- &\geq 0, & t &= 1, \ldots, 12.
\end{aligned}$$

Après résolution du problème, on obtient que la production des 12 prochains mois doit être la suivante :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Juillet : 9666 | Octobre : 12000 | Janvier : 14667 | Avril : 8500 |
| Août : 9667 | Novembre : 14667 | Février : 12000 | Mai : 8500 |
| Septembre : 9667 | Décembre : 14667 | Mars : 8500 | Juin : 8499 |