Introduction à l'optimisation et la recherche opérationnelle (2017–2018)

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin, Nikola Obrenovic

Introduction à l'optimisation linéaire (29 septembre 2017)

Question 1:

Pour chaque système de contraintes listé ci-dessous :

— représenter graphiquement le domaine admissible correspondant à ce système d'équations,

— préciser si le domaine admissible est (1) vide ou non vide, et (2) borné ou non borné.

1. Contraintes :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

3. Contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

4. Contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Contraintes :

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Question 2:

Considérons le domaine des solutions admissibles représenté en gris sur la figure suivante :

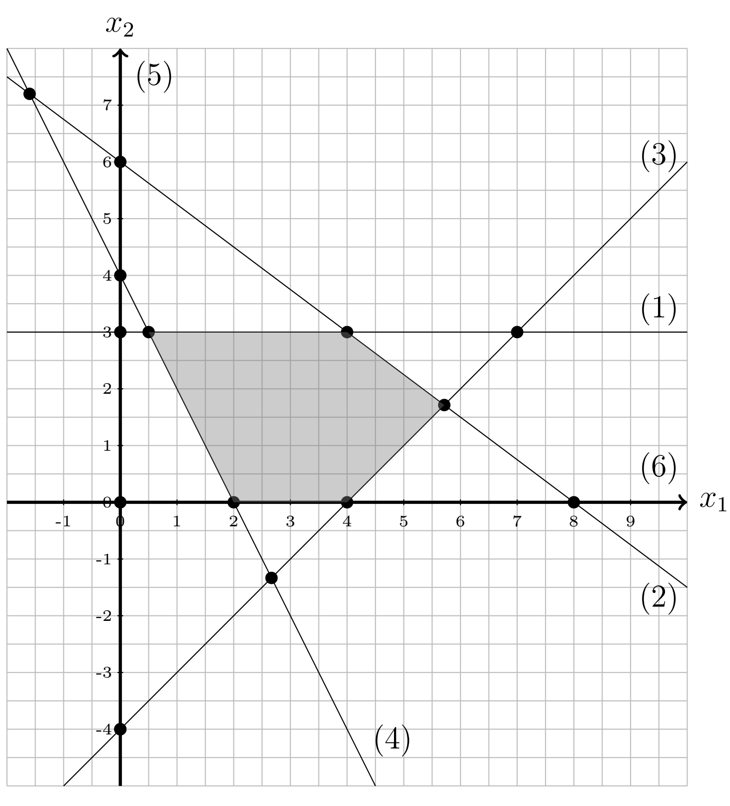

Figure 1 – Domaine admissible

1. Formuler les 6 contraintes qui déterminent le domaine admissible représenté en gris sur la Figure 1.

2. Ecrire le problème d'optimisation linéaire correspondant sous forme standard en sachant que la fonction objectif est

$$\max x_1 + x_2,$$

   Donner explicitement la matrice $\boldsymbol{A}$ et les vecteurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

3. Calculer toutes les solutions de base de ce problème d'optimisation linéaire et pour chacune des solutions de base
   — identifier si cette solution de base est admissible,
   — identifier cette solution de base sur la Figure 1

   À quoi correspondent les solutions de base sur le graphique ?

4. Pour quelle(s) raison(s) le point (3,2) représente-t-il une solution admissible, mais non une solution de base ?

Question 3 – QCM:

1. Soit un problème d'optimisation linéaire en forme standard avec $n = 7$ variables et $m = 3$ contraintes d'égalité. Si le problème est incompatible (*infeasible*), le nombre de solutions vérifiant toutes les contraintes est
   (a) supérieur ou égal à 7,
   (b) 0,
   (c) infini,
   (d) inférieur ou égal à 3.
2. Une contrainte qui n'a pas d'impact sur le domaine admissible est une contrainte
   (a) non-négative,
   (b) redondante,
   (c) standard,
   (d) d'écart.
3. Une solution *admissible* d'un problème d'optimisation linéaire
   (a) doit vérifier toutes les contraintes simultanément,
   (b) doit vérifier au plus une contrainte,

(c) se trouve toujours sur les bords du domaine admissible,

(d) est optimale.

4. Soit le polytope sous forme standard $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$, avec $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ et $n \geq m$. Soit $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice comportant les colonnes de la matrice $\boldsymbol{A}$ correspondant aux variables en base, $\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ la matrice contenant les colonnes de la matrice $\boldsymbol{A}$ correspondant aux variables hors base et $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de permutation telle que $\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N})$. Le vecteur $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^{n-m}}\end{bmatrix}$ est un sommet de Q si :

(a) $\boldsymbol{B}$ n'est pas singulière,

(b) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq 0$,

(c) $Q = \emptyset$,

(d) il n'y a pas de direction admissible.

5. Le domaine admissible défini par les contraintes

$$
\begin{aligned}
2x - y &\geq 0 \qquad (1)\\
x + y &\leq 1 \qquad (2)\\
x &\leq 6 \qquad (3)\\
y &\geq -3 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(a) est vide,

(b) a un sommet et est borné,

(c) a un sommet et est non borné,

(d) a trois sommets et est borné,

(e) a trois sommets et est non borné.

Existe-t-il une contrainte redondante ? Si oui, quelle est cette contrainte ?