Professeur : Michel Bierlaire, Assistant responsable : Virginie Lurkin, Nikola Obrenovic

Introduction à l'optimisation linéaire – corrigé (6 octobre 2017)

Solution de la question 1:

1. Afin d'écrire le domaine admissible en forme standard ($Ax = b, x \geq 0$), on introduit les variables d'écart $e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0$. On obtient :

$$x_1 - x_2 - e_1 = -2, \tag{1}$$
$$3x_1 - 2x_2 + e_2 = 9, \tag{2}$$
$$x_1 + 2x_2 + e_3 = 7, \tag{3}$$
$$x_1 - 2x_2 - e_4 = -7, \tag{4}$$
$$x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geq 0. \tag{5}$$

2. Nous représentons chaque solution par le vecteur $x = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4)$.

   On a $m = 4, n = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix},$$

   — Pour le sommet $E(0,0)$, les valeurs des variables d'écarts sont

   $e_1 = 2,$
   $e_2 = 9,$
   $e_3 = 7,$
   $e_4 = 7.$

   Pour montrer que la solution $E = (0, 0, 2, 9, 7, 7)$ correspond bien à une solution de base admissible, on vérifie les conditions de la définition 3.38 du livre de référence.

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien non singulière (det(B) = -1) .

2. $x_1 = x_2 = 0$.

De plus, on a aussi que $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \geq 0$.

Il s'agit donc bien d'une solution de base admissible.

— Pour le sommet $C(0{,}2)$, les valeurs des variables d'écarts sont

$e_1 = 0$,
$e_2 = 13$,
$e_3 = 3$,
$e_4 = 3$.

Pour montrer que la solution $C = (0, 2, 0, 13, 3, 3)$ correspond bien à une solution de base admissible, on vérifie les conditions de la définition 3.38 du livre de référence.

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien non singulière (det(B) = 1).

2. $x_1 = e_1 = 0$.

De plus, on a aussi que $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0$.

Il s'agit donc bien d'une solution de base admissible.

— Pour le sommet $A(1{,}3)$, les valeurs des variables d'écarts sont

$e_1 = 0,$
$e_2 = 12,$
$e_3 = 0,$
$e_4 = 2.$

Pour montrer que la solution $A = (1, 3, 0, 12, 0, 2)$ correspond bien à une solution de base admissible, on vérifie les conditions de la définition 3.38 du livre de référence.

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien non singulière (det(B) = 3).

2. $e_1 = e_3 = 0$.

De plus, on a aussi que $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$.

Il s'agit donc bien d'une solution de base admissible.

— Pour le sommet B(4,1.5), les valeurs des variables d'écarts sont

$e_1 = 4.5,$
$e_2 = 0,$
$e_3 = 0,$
$e_4 = 8.$

Pour montrer que la solution $B = (4, 1.5, 4.5, 0, 0, 8)$ correspond bien à une solution de base admissible, on vérifie les conditions de la définition 3.38 du livre de référence.

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien non singulière (det(B) = 8).

2. $e_2 = e_3 = 0$.

De plus, on a aussi que $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ 4.5 \\ 8 \end{pmatrix} \geq 0$.

Il s'agit donc bien d'une solution de base admissible.

— Pour le sommet $D(3{,}0)$, les valeurs des variables d'écarts sont

$e_1 = 5$,
$e_2 = 0$,
$e_3 = 4$,
$e_4 = 10$.

Pour montrer que la solution $D = (3, 0, 5, 0, 4, 10)$ correspond bien à une solution de base admissible, on vérifie les conditions de la définition 3.38 du livre de référence.

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est bien non singulière (det(B) = -3).

2. $x_2 = e_2 = 0$.

De plus, on a aussi que $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \geq 0$.

Il s'agit donc bien d'une solution de base admissible.

3. Pour le sommet $G(3{,}5)$, les valeurs des variables d'écarts sont

$e_1 = 0$,
$e_2 = 10$,
$e_3 = -6$,
$e_4 = 0$.

Pour montrer que la solution $G = (3, 5, 0, 10, -6, 0)$ correspond bien à une solution de base, on vérifie les conditions de la définition 3.38 du livre de référence.

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est bien non singulière (det(B) = -1).

2. $e_1 = e_4 = 0$.

Comme on a que $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} \ngeq 0$.

Il s'agit donc d'une solution de base mais non admissible (la variable e_3 est négative).

4. Pour le sommet J(2,1), les valeurs des variables d'écarts sont

   $e_1 = 3,$
   $e_2 = 5,$
   $e_3 = 3,$
   $e_4 = 7.$

   Comme on a que $Ax = b, x \geq 0$, le sommet $J = (2, 1, 3, 5, 3, 7)$ correspond bien à une solution admissble. La seconde condition de la définition 3.38 du livre de référence n'est cependant pas vérifiée (il n'existe pas d'indice i tel que $x_i = 0$) et il ne s'agit donc pas d'une solution de base.

5. La solution de base en A ainsi que la matrix de permutation corres-

pondant à la solution de bases sont :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice de permutation P sert simplement à échanger de place les variables en base et hors-base. Si p est l'indice d'une variable hors-base, les directions admissibles sont donc données par :

$$d_p = P \begin{pmatrix} d_{B_p} \\ d_{N_p} \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de permutation pour la solution de base en A, $d_{B_p} = -B^{-1}A_p$ et d_{N_p} est défini de sorte que :

$$P^T \hat{e}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{N_p} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que tous les élements de d_{N_p} sont nuls sauf celui qui correspond à la variable p qui vaut 1.
Au point A, les indices p correspondant aux variables hors-base sont $p = 3$ et $p = 5$. Il faut donc résoudre ceci pour ces deux valeurs de p.

$\underline{p = 3}$

$$d_{N_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d_{B_3} = -B^{-1}A_3 = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul de d_{N_3} est laissé en exercice. Il nous reste donc à calculer

d_{B_3} :

$$\begin{aligned}
d_{B_3} &= -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La première direction admissible est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
d_3 &= P\begin{pmatrix} d_{B_3} \\ d_{N_3} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -8/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ -8/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si on veut représenter d_3 sur la Figure, il nous suffit de prendre les deux premières coordonnées. De plus, on ne s'inquiète uniquement de la direction et pas de la norme de ce vecteur. On peut donc choisir de le représenter comme $\begin{pmatrix}1 & -1/2\end{pmatrix}^T$ sur la Figure 1. Vous pouvez vérifier que la direction reste inchangée.

***p* = 5**

$$d_{N_5} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d_{B_5} = -B^{-1}A_5 = -\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Le calcul de d_{N_5} est laissé en exercice. Il nous reste donc à calculer d_{B_5} :

$$\begin{aligned}
d_{B_5} &= -\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -8 & 3 & -1 & 0\\ 4 & 0 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La deuxième direction admissible est donc donnée par :

$$
\begin{aligned}
d_5 &= P \begin{pmatrix} d_{B_5} \\ d_{N_5} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si on veut représenter d_5 sur la Figure, il nous suffit de prendre les deux premières coordonnées. De plus, on ne s'inquiète uniquement de la direction et pas de la norme de ce vecteur. On peut donc choisir de le représenter comme $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}^T$ sur la Figure 1. Vous pouvez vérifier que la direction reste inchangée.

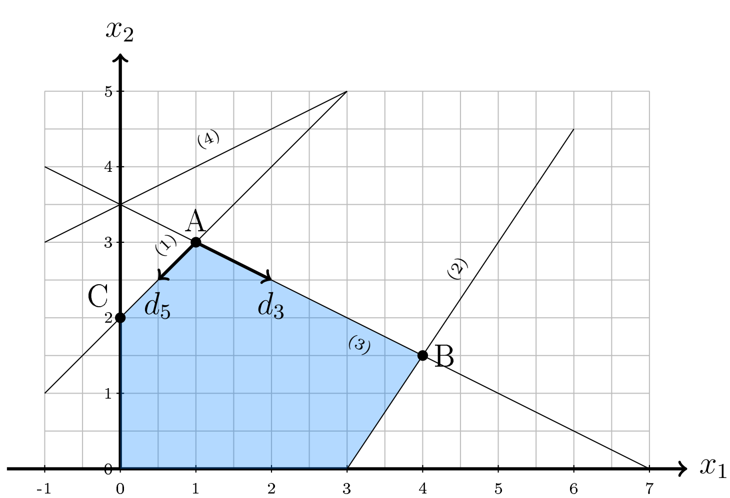

FIGURE 1 – Directions admissibles

6. La contrainte (4) est redondante et peut donc être omise. On obtient donc

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\geq -2,\\
3x_1 - 2x_2 &\leq 9,\\
x_1 + 2x_2 &\leq 7,\\
x_1 &\geq 0,\\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Solution de la question 2:

Nous souhaitons écrire le problème linéaire en forme standard, c'est-à-dire sous la forme

$$
\begin{array}{lr}
\min & c^T x\\
\text{sous contraintes} & Ax = b,\\
 & x \geq 0.
\end{array}
$$

Pour se ramener à un problème de minimisation, il suffit de se rappeler que $\max f(x)$ est équivalent à $\min -f(x)$. La fonction objectif peut dès lors s'écrire

$$\min 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 4x_4$$

Nous allons maintenant ré-écrire chacune des contraintes ci-dessous sous la forme $Ax = b, x \geq 0$.

s.c.	$2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 7$	✔	(1)
	$8x_1 - 5x_3 + 3x_4 \leq 8$	✔	(2)
	$-2x_2 - 5x_3 + 4x_4 \leq -6$	✔	(3)
	$1 \leq x_1 \leq 4$	⚠	(4)
	$x_2 \geq -3$	⚠	(5)
	$x_3 \in \mathbb{R}$	⚠	(6)
	$x_4 \leq 0$	⚠	(7)

Les contraintes (1) à (3), marquées d'une coche, peuvent être transformée en contrainte d'égalité en introduisant les variables d'écart $e_1, e_2, e_3 \geq 0$ comme suit

$$2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - e_1 = 7 \tag{1}$$

$$8x_1 - 5x_3 + 3x_4 + e_2 = 8 \tag{2}$$

$$-2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + e_3 = -6 \tag{3}$$

Les contraintes (4) à (7) ne peuvent pas être transformées aussi facilement. Nous nous intéressons maintenant à chacune de ces contraintes en détail.

La contrainte (4), $1 \leq x_1 \leq 4$, correspond aux deux contraintes suivantes

$$x_1 \geq 1$$

$$x_1 \leq 4$$

Afin d'obtenir des contraintes d'égalité, on introduit deux nouvelles variables d'écart, $e_4, e_5 \geq 0$ comme suit

$$x_1 - e_4 = 1, \tag{4a}$$

$$x_1 + e_5 = 4. \tag{4b}$$

Notons que la contrainte $x_1 - e_4 = 1$ rend la contrainte de non-negativité sur x_1 redondante. En effet puisque $e_4 \geq 0$, $x_1 = e_4 + 1$ est forcément ≥ 0. Attention toutefois qu'en forme standard, toutes les variables doivent être positives. Même si c'est redondant.

Nous allons voir qu'il est également possible d'écrire la contrainte $1 \leq x_1 \leq 4$ sous forme d'égalité en n'utilisant qu'une seule variable d'écart et ce grâce à un changement de variable. Cette méthode a l'avantage d'éviter d'avoir une contrainte redondante. Les deux méthodes sont valides.

Le changement de variable est le suivant : $x'_1 = x_1 - 1$. Si on change la variable x_1 de cette manière, la contrainte d'égalité supérieure, c'est-à-dire $x_1 \geq 1$, devient $x'_1 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x'_1 \geq 0$. Nous nous retrouvons donc avec une contrainte de non-négativité pour x'_1. Il ne nous reste plus que la contrainte d'inégalité inférieure, c'est-à-dire $x_1 \leq 4$, qui devient $x'_1 + 1 \leq 4 \Leftrightarrow x'_1 \leq 3$. On introduit maintenant la variable d'écart $e_6 \geq 0$ afin de transformer cette contrainte en une contrainte d'égalité et on obtient :

$$x'_1 + e_6 = 3 \tag{4}$$

Nous voyons donc qu'avec cette méthode, nous n'utilisons qu'une seule variable d'écart. Si vous utilisez cette méthode, il ne faut pas oublier de remplacer x_1 dans la fonction objectif ainsi que dans toutes les contraintes. Pour la suite de la résolution de l'exercice, nous utiliserons les deux variables d'écart e_4 et e_5.

Pour la contrainte (5), $x_2 \geq -3$, nous passons par un changement de variable. Pour cela, nous définissons une nouvelle variable $x_2' \geq 0$ comme

$$x_2' = x_2 + 3.$$

La contrainte de non-négativité sur x_2' assure bien que $x_2 \geq -3$.

Pour la contrainte (6), $x_3 \in \mathbb{R}$, nous passons par deux nouvelles variables $x_3^+ \geq 0$ et $x_3^- \geq 0$, représentant respectivement la partie positive et négative de x_3. Le changement de variable à opérer est donc simplement

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-.$$

La contrainte (6) peut donc être remplacée par les contraintes de non-négativité sur x_3^+ et x_3^-.

Finalement, pour la contrainte (7), $x_4 \leq 0$, nous passons par une nouvelle variable $x_4' \geq 0$ et le changement de variable à opérer est simplement

$$x_4' = -x_4$$

Il ne reste plus qu'à remplacer x_2 par $(x_2' - 3)$, x_3 par $(x_3^+ - x_3^-)$, et x_4 par $-x_4'$ dans la fonction objectif et à rassembler l'ensemble des constraintes d'égalité et de non-négativité définies ci-dessus. Le problème en forme standard s'écrit donc comme :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 - 5(x_2' - 3) + 7(x_3^+ - x_3^-) - 4(-x_4') \\
\text{s.c.} \quad & 2x_1 + 4(x_2' - 3) - 6(x_3^+ - x_3^-) - e_1 = 7 && (1) \\
& 8x_1 - 5(x_3^+ - x_3^-) + 3(-x_4') + e_2 = 8 && (2) \\
& -2(x_2' - 3) - 5(x_3^+ - x_3^-) + 4(-x_4') + e_3 = -6 && (3) \\
& x_1 - e_4 = 1 && (4a) \\
& x_1 + e_5 = 4 && (4b) \\
& x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, x_4', e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 - 5x_2' + 7x_3^+ - 7x_3^- + 4x_4' + 15 \\
\text{s.c.} \quad & 2x_1 + 4x_2' - 6x_3^+ + 6x_3^- - e_1 = 19 && (1)\\
& 8x_1 - 5x_3^+ + 5x_3^- - 3x_4' + e_2 = 8 && (2)\\
& -2x_2' - 5x_3^+ + 5x_3^- - 4x_4' + e_3 = -12 && (3)\\
& x_1 - e_4 = 1 && (4a)\\
& x_1 + e_5 = 4 && (4b)\\
& x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, x_4', e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solution de la question 3:

Afin de trouver la valeur de α, nous pouvons remplacer $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$ dans la contrainte d'égalité (3), nous avons alors que

$$3 + 3 + \alpha = 8,$$

ce qui implique $\alpha = 2$.

En remplaçant $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, et $x_3 = 2$ dans les contraintes, on obtient

$$
\begin{aligned}
9 - 4 &= 5, && (1)\\
6 + 1 - 6 &\leq 4, && (2)\\
3 + 3 + 2 &= 8, && (3)\\
3 &= 3, && (4)\\
2 &\leq 9, && (5)\\
3 &\geq 0, && (6)\\
1 &\geq 0, && (7)\\
2 &\geq 0. && (8)
\end{aligned}
$$

On voit que les contraintes (1), (3) et (4) sont actives à la solution optimale. Les autres contraintes sont inactives.

Solution de la question 4:

Afin de modéliser ce problème de planification de production de deux médicaments, on introduit les deux variables de décision suivantes :

— x_1, le nombre de kilogrammes de Destressor 3000 produit chaque semaine,

— x_2, le nombre de kilogrammes d'Anxiongenus 500 produit chaque semaine.

L'objectif de la société pharmaceutique étant de maximiser son profit, la fonction objectif s'écrit naturellement comme :

$$\max\ 30x_1 + 45x_2$$

On sait que chaque semaine, la société ne peut dépasser 210 heures de temps de production. Sachant que chaque kilogramme de Destressor 3000 contient 500 grammes de composé A et 500 grammes de composé C et qu'il faut respectivement 2 heures et 4 heures pour produire un kilogramme de composé A et C, on déduit qu'il faut

$$\frac{500}{1000} \times 2 + \frac{500}{1000} \times 4 = 3 \text{ heures}$$

pour produire un kilogramme de Destressor 3000.

De façon similaire, puisque chaque kilogramme d'Anxiongenus 500 contient 750 grammes de composé B et 250 grammes de composé C (ratio 3 :1) et qu'il faut respectivement 8 heures et 4 heures pour produire un kilogramme de composé B et C, on déduit qu'il faut

$$\frac{750}{1000} \times 8 + \frac{250}{1000} \times 4 = 7 \text{ heures}$$

pour produire un kilogramme d'Anxiongenus 500.

La contrainte assurant que le temps total de production ne dépasse pas 210 heures s'écrit donc comme :

$$3x_1 + 7x_2 \leq 210.$$

On sait également que la société ne peut dépasser 70 heures de raffinement. Sachant que chaque kilogramme de composé C requiert 4 heures de raffinement et qu'il faut 500 grammes de composé C pour produire un kilogramme de Destressor 3000, on déduit qu'il faut

$$\frac{500}{1000} \times 4 = 2 \text{ heures}$$

de raffinement pour produire un kilogramme de Destressor 3000.

De façon similaire, on sait qu'il faut 250 grammes de composé C pour produire un kilogramme d'Anxiongenus 500, on déduit qu'il faut

$$\frac{250}{1000} \times 4 = 1 \text{ heure}$$

de raffinement pour produire un kilogramme d'Anxiongenus 500.

La contrainte assurant que le temps total de raffinement ne dépasse pas 70 heures s'écrit donc comme :

$$2x_1 + x_2 \leq 70.$$

Finalement, on sait que la production totale de médicament ne peut dépasser 40 kilogrammes, ce qui se traduit par la contrainte suivante :

$$x_1 + x_2 \leq 40.$$

En ajoutant les contraintes de non-négativité pour les variables de décision (les quantités produites ne peuvent être négatives), on obtient le problème d'optimisation linéaire suivant

$$\begin{array}{rrcll}
\max & 30x_1 + 45x_2 & & & \\
\text{s.c.} & 3x_1 + 7x_2 & \leq & 210 & (1) \\
 & 2x_1 + x_2 & \leq & 70 & (2) \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 40 & (3) \\
 & x_1,\ x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

La Figure 2 représente graphiquement le domaine admissible, ainsi que plusieurs courbes d'indifférence pour la fonction objectif (en pointillé). Nous voyons que la solution optimale se situe à l'intersection des contraintes (1) et (3). La solution optimale est : $x_1 = 17,5$ et $x_2 = 22,5$. Il faut donc produire 17,5 kg de Destressor 3000 et 22,5 kg d'Anxiongenus 500. Le profit est alors de 1537,5 CHF.

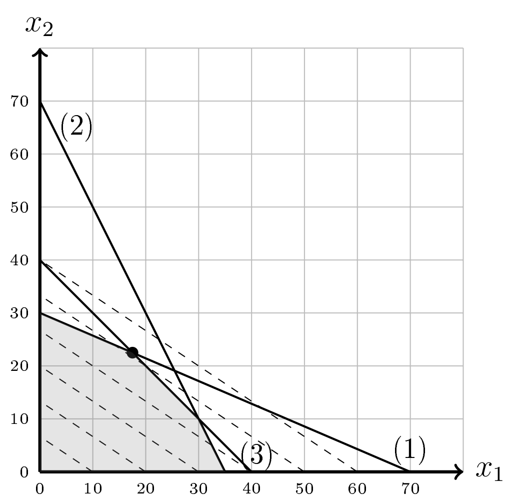

FIGURE 2 – Domaine admissible et solution optimale