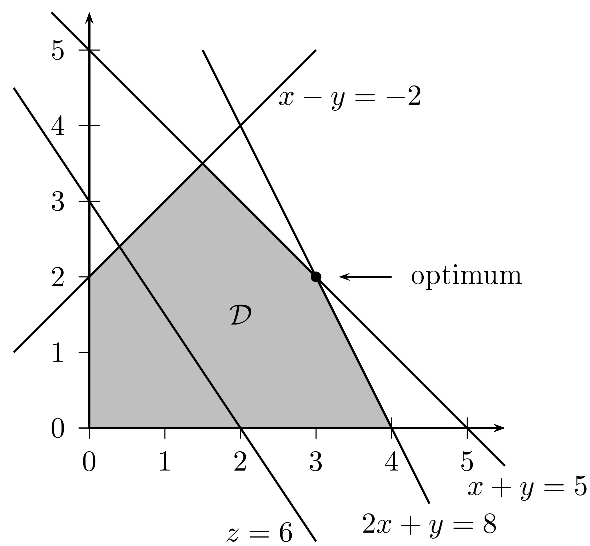
Corrigé 5

Problème 1

a) Le domaine des solutions admissibles est :



Les sommets ou points extrêmes de $\mathcal{D}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) On détermine la solution optimale graphiquement, en représentant les lignes de niveau de z. L'optimum est atteint en $(3, 2)$ et a une valeur égale à -13.

c) Le programme linéaire sous forme canonique s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{llrcrcl}
\min & z = & -3x & - & 2y & & \\
\text{s.c.} & & -x & + & y & \leq & 2 \\
& & 2x & + & y & \leq & 8 \\
& & x & + & y & \leq & 5 \\
& & & & x & \geq & 0 \\
& & & & y & \geq & 0
\end{array}$$

Mettons-le sous forme standard :

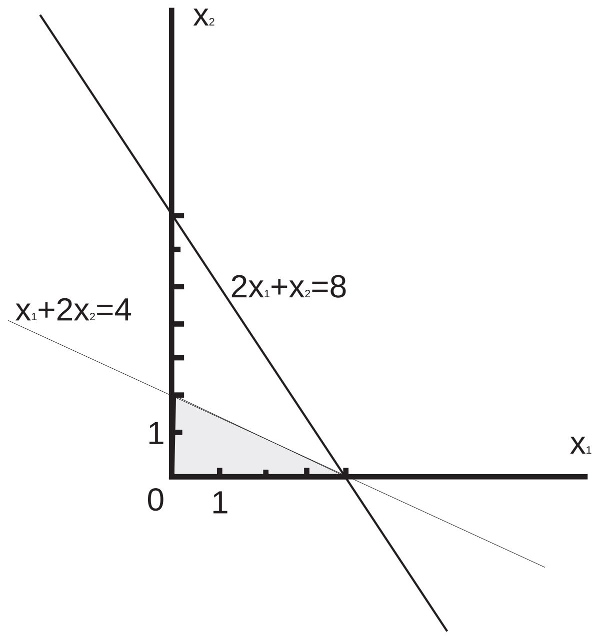
$$\begin{array}{llrcrcccccccl}
\min & z = & -3x & - & 2y & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & -x & + & y & + & a & & & & & = & 2 \\
& & 2x & + & y & & & + & b & & & = & 8 \\
& & x & + & y & & & & & + & c & = & 5 \\
& & x & , & y & , & a & , & b & , & c & \geq & 0
\end{array}$$

Problème 2

a) On introduit les variables d'écart x_3 et x_4:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} \min z & = & x_1 & + & x_2 & & & & & \\ s.c. & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 8 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = 4 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

b)



c) Base (x_1, x_4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Direction correspondant à x_2:

$$d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ -\frac{x_4}{d_4} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 0$$

Direction correspondant à x_3:

$$d_B = -B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} -\frac{x_1}{d_1} = 8 \\ d_4 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 8$$

d) Base (x_2, x_3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

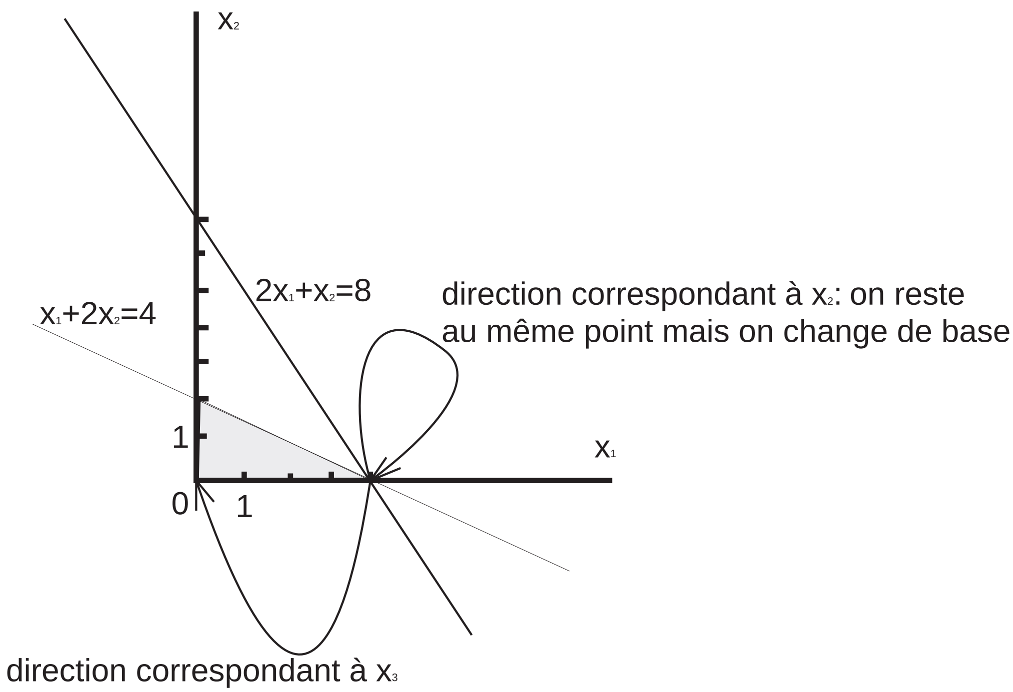
Direction correspondant à x_1:

$$d_B = -B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ -\frac{x_3}{d_3} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

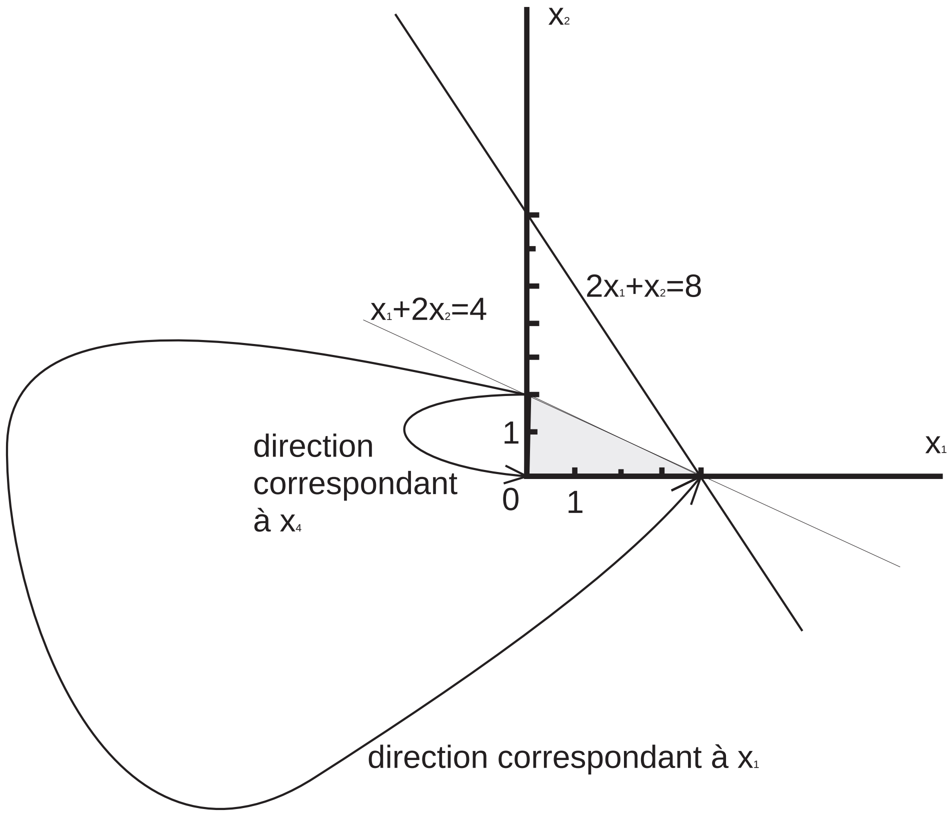
Direction correspondant à x_4:

$$d_B = -B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} -\frac{x_2}{d_2} = 4 \\ d_3 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* = 4$$

e)



f)



Problème 3

a) Si les indices de base sont 1,2, et 3, la matrice de base est donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dont l'inverse s'écrit:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur b étant $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, les variables de base valent $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$
La variable hors-base x_4 vaut par définition 0.
Cette solution est admissible.

b) Calculons le coût réduit pour la variable x_4:

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 1 > 0$$

La variable x_4 ne réduit pas le coût. La solution de base d'indices 1,2 et 3 correspond donc a l'optimum du problème.

Problème 4

a) On introduit les variables d'écart x_3, x_4 et x_5 :

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\min & z = & -3x_1 & - & 4x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 50 \\
 & & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 20 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 30 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) On obtient le tableau initial suivant :

$$
\begin{array}{c}
\\ T_0 = \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|ccccc|c|cc}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & \multicolumn{1}{c}{x_5} & \multicolumn{1}{c}{} & \theta & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 50 & 50 & \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 & 20 & \leftarrow \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 & & \\
\hline
-3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\uparrow} & & & & & \multicolumn{1}{c}{} & &
\end{array}
$$

Les variables en base sont x_3, x_4 et x_5. Le point extrême visité est $(0, 0)$.

$$
\begin{array}{c}
\\ T_1 = \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|ccccc|c|cc}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & \multicolumn{1}{c}{x_5} & \multicolumn{1}{c}{} & \theta & \\
\hline
0 & \mathbf{2} & 1 & -1 & 0 & 30 & 15 & \leftarrow \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 & 30 & \\
\hline
0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 60 & & \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{} & \uparrow & & & & \multicolumn{1}{c}{} & &
\end{array}
$$

Les variables en base sont x_3, x_1 et x_5. Le point extrême visité est $(20, 0)$.

$$
x^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ T_2 = \\ \\
\end{array}
\begin{array}{|ccccc|c|}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & \multicolumn{1}{c}{x_5} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 15 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\
0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 & 15 \\
\hline
0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 120 \\
\hline
\end{array}
$$

Les variables en base sont x_2, x_1 et x_5. Le point extrême visité est $(20, 15)$.

$$x^+ = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Tous les coûts réduits étant positifs, ce tableau est optimal. La solution optimale est $x_1^* = 20$ et $x_2^* = 15$, pour une valeur de la fonction objectif de $z^* = -120$.

Problème 5

$$\begin{array}{llrcrcrcr} \min & z = & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ \text{s.c.} & & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Posons le problème auxiliaire suivant (multiplier les contraintes par -1 pour que $b \geq 0$) :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr} \min & z = & y_1 & + & y_2 & & & & & & & & \\ \text{s.c.} & & -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & y_1 & & & = & 1 \\ & & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & y_2 & = & 2 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Après avoir introduit les variables artificielles y_1 et y_2, on cherche une solution admissible de notre problème à l'aide d'une phase 1 de l'algorithme du simplexe

$T_0 =$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		θ	
-2	-1	1	1	0	1	-	
-1	**2**	-1	0	1	2	1	$\leftarrow$
3	-1	0	0	0	-3		
	$\uparrow$						

$T_1 =$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		θ	
-5/2	0	**1/2**	1	1/2	2	4	$\leftarrow$
-1/2	1	-1/2	0	1/2	1	-	
5/2	0	-1/2	0	1/2	-2		
		$\uparrow$					

$T_2 =$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
-5	0	1	2	1	4
-3	1	0	1	1	3
0	0	0	1	1	0

La phase 1 du simplexe est terminée. On peut à partir de cette base admissible résoudre la phase II.

$T_0 =$

	x_1	x_2	x_3	
	-5	0	1	4
	-3	1	0	3
	10	0	0	-10

Ce tableau est optimal. La solution optimale du problème est $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $z = 10$.

Problème 6

a) Posons x_1 le nombre de radios de type A et x_2 le nombre de radios de type B produites chaque semaine.

Le programme linéaire maximisant le chiffre d'affaires hebdomadaire de RadioIn est donc donné par :

$$\begin{array}{llrcrcr}
\text{Max} & z = & 15x_1 & + & 10x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Forme canonique

$$\begin{array}{llrcrcr}
\text{Min} & z = & -15x_1 & - & 10x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\
& & -2x_1 & - & x_2 & \leq & -10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b) Forme standard:

$$\begin{array}{llrcrcccccccccr}
\text{Min} & z = & -15x_1 & - & 10x_2 & & & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 24 \\
& & -2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & -10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & = & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

On obtient le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	1	2	1	0	0	0	24
T_0	-2	-1	0	1	0	0	-10
	2	1	0	0	1	0	45
	1	3	0	0	0	1	30
	-15	-10	0	0	0	0	0

Ce tableau est non admissible donc la phase I est nécessaire pour déterminer une solution de base admissible.
Problème auxiliaire : (Multiplier la deuxième contrainte par -1 pour avoir $b \geq 0$ et rajouter la variable artificielle y_1)

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcrcl}
\text{Min} & w = & y_1 & & & & & & & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & = & 24 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & & & + & y_1 & = & 10 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & = & 45 \\
& & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & + & x_6 & & & = & 30 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & y_1 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tableau initial du problème auxiliaire :

$$
T_0^{aux} \quad
\begin{array}{|ccccccc|c|}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \multicolumn{1}{c}{y_1} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\
2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 45 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
\hline
-2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\
\hline
\end{array}
$$

November 19, 2012 – mbi/fsh